venerdì 9 ottobre 2020 15:49

Teorema di esistenza ed unicità locale per EDO di Picard-Lindelöf.

<u>TEOREMA</u> Sia $f \in C(D \times I, \mathbb{R}^n)$ dove $D = \{u \in \mathbb{R}^n \mid |u-u_0| \leq r\}$, $I = [t_0 - T_0, t_0 + T_0]$;

Assumiamo che f sia uniformemente lipschitziana in u su I (cioè $|f(u,t) - f(v,t)| \leq L|u-v|$ $\forall\, u, v \in D$, $\forall\, t \in I$, per una qualche $L > 0$).

Sia $M = \max_{D \times I} |f|$ e $T := \min\left\{T_0, \frac{r}{M}\right\}$.

Allora, $\exists!$ soluzione $u \in C^1(J, D)$, $J := [t_0 - T, t_0 + T]$ del problema

$$(IVP) \quad \begin{cases} u' = f(u,t) \\ u(t_0) = u_0 . \end{cases}$$

Inoltre, $u = \lim_{k \to \infty} \phi^k(\bar{u})$, $\forall\, \bar{u} \in C(J, D)$, dove se $\bar{u} \in C(J, D)$,

$$(\phi(\bar{u}))(t) := u_0 + \int_{t_0}^{t} f(\bar{u}(s), s)\, ds .$$

e $\phi^k := \underbrace{\phi \circ \dots \circ \phi}_{k\text{-volte}}$.

<u>OSS.</u> (i) $\displaystyle\int_{t_0}^{t} f = \left(\int_{t_0}^{t} f_1, \dots, \int_{t_0}^{t} f_n\right)$.

(ii) ϕ è un operatore regolarizzante:

$$\phi : C(J, D) \to C^1(J, D)$$

$$(\phi(\bar{u})(t))' = f(\bar{u}(t), t)$$

funzione costante.

(iii) Sia $u \in C^1(J, D)$. Allora

$$(*) \begin{cases} u' = f(u,t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \iff u = \Phi(u)$$

Dim. "$\Rightarrow$"

$$\underset{u_0}{u(t) - u(t_0)} = \int_{t_0}^{t} u'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} f(u(s), s)\,ds$$

$$\iff u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(u(s), s)\,ds = (\Phi(u))(t).$$

"$\Leftarrow$": $u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(u(s), s)\,ds$

T.F.C.

$\Rightarrow u \in C^1(J, D)$ e $u' = f(u(t), t)$

$u(t_0) = u_0$. $\Rightarrow u$ verifica $(*)$. ∎

(iv). L'unicità è conseguenza del primo lemma di Gronwall (vedi lezione del 5/10/20)

Dim. (esistenza)

Mostriamo che $\Phi : C(J, D) \to C^1(J, D)$:

abbiamo solo far vedere che $\Phi(u)(t) \in D$ $\forall\, t \in J$. Infatti, $\underline{\text{sia } u \in C(J,D)}$

$$|\Phi(u)(t) - u_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(u(s), s)\,ds \right|$$

$$\overset{(!)}{\leq} \left| \int_{t_0}^{t} |f(u(s),s)|\,ds \right| \leq M|t-t_0|$$

$$\underset{t\in J}{\leq} MT \leq r, \quad \text{cioè } \phi(u)(t) \in D, \forall t \in J.$$

Definiamo la seguente successione di funzioni in $C(J,D)$:

$$\underline{v_k} := \begin{cases} u_0 & , k=0 \\ \underline{\phi(v_{k-1})} & , k\geq 1 \end{cases}$$

<u>Oss.</u> se v_k conv. uniformem. a $u \in C(J,D)$

$$v_k(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(v_{k-1}(s), s)\,ds = \phi(v_{k-1})(t)$$

$$\downarrow$$

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(u(s),s)\,ds$$

$\overset{\text{Oss.(iii)}}{\Longleftrightarrow}$ u è sol. di (IVP).

$$v_k = u_0 + (v_1 - v_0) + (v_2 - v_1) + \dots + (v_k - v_{k-1})$$

chiamo $w_j := v_j - v_{j-1}$, $\forall j \geq 1$

$$v_k = u_0 + \sum_{j=1}^{k} w_j.$$

<u>Lemma</u> $\forall j \geq 1$ si ha $\forall t \in J$

(1) $$|w_j(t)| \le \frac{|t-t_0|^j}{j!} M L^{j-1}.$$

Dim. Per induzione su j.

$$|w_1(t)| = |v_1 - u_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(u_0, s)\,ds\right|$$

$$\le M|t-t_0| \quad \text{ossia la (1) con } j=1.$$

Assumiamo (1) e dimostriamola con j sostituito da $j+1$.

Sia $j \ge 1$.

$$|w_{j+1}(t)| = |v_{j+1}(t) - v_j(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} f(v_j(s),s) - f(v_{j-1}(s),s)\,ds\right|$$

$$\le \left|\int_{t_0}^{t} \left| f(v_j(s),s) - f(v_{j-1}(s),s)\right| ds\right|$$

$$\le L\left|\int_{t_0}^{t} |v_j(s) - v_{j-1}(s)|\,ds\right| = L\left|\int_{t_0}^{t} |w_j(s)|\,ds\right|$$

$$\overset{(1)}{\le} L\left|\int_{t_0}^{t} \frac{|s-t_0|^j}{j!} M L^{j-1}\,ds\right|$$

$$= \frac{ML^j}{j!}\left|\int_{t_0}^{t} |s-t_0|^j\,ds\right| \underset{\tau = s-t_0}{=} \frac{ML^j}{j!}\left|\int_0^{t-t_0} |\tau|^j\,d\tau\right|$$

$$= \frac{ML^j}{j!}\int_0^{|t-t_0|} \tau^j\,d\tau = \frac{ML^j}{(j+1)!}|t-t_0|^{j+1}. \quad \blacksquare$$

Quindi, la serie $\sum_1^\infty w_j(t)$ converge totalmente su J.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_J |w_j| \overset{(1)}{\le} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{ML^{j-1}T^j}{j!} =$$

$$= \frac{M}{L}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(LT)^j}{j!} = \frac{M}{L}\left(e^{LT} - 1\right). \quad \blacksquare$$

Corollario ($\exists$ globale)

connessi

Sia $f : I \times \mathbb{R}^n \quad I$ ... aperto di $\mathbb{R}^n$

Sia f definita su $U \times \mathbb{R}$, U aperto di $\mathbb{R}^n$
$f \in C(U \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ e limitata ossia $\sup_{U\times\mathbb{R}} |f| \le M < \infty$;
e f è loc. lipsch. in $u \in U$ uniformemente su J.
Allora $\exists!$ soluzione di (IVP), $\forall t \in \mathbb{R}$.

globale nei tempi.

SOLUZIONI LOCALI

Sia $f \in C(U \times I_0, \mathbb{R}^n)$ con U aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ e I_0 intervallo di $\mathbb{R}$.

Assumiamo che si abbia unicità locale dell'EDO

$$(3) \quad u' = f(u,t), \quad t \in I_0$$

ossia $\forall$ $u_0 \in U$ e $t_0 \in I_0$ esiste $\delta > 0$ t.c.

se u_1 e u_2 sono soluzioni di (IVP) $\begin{cases} u' = f(u,t), & t \in (t_0-\delta, t_0+\delta) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$ (ovviamente $u_i(t) \in U$ $\forall$ $|t-t_0| < \delta$)

$\Longrightarrow u_1 \equiv u_2$ su $(t_0-\delta, t_0+\delta)$.

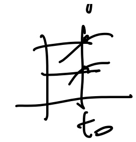
Def Dati $u_0 \in U$ e $t_0 \in I_0$ definiamo SOLUZIONE LOCALE DI
$(4) \begin{cases} u' = f(u,t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$, una funzione $u \in C^1(J, U)$, con $J \subseteq I_0$ intervallo contenente t_0, che soddisfa (4) $\forall t \in J$.

Lemma Se $u_1 : J_1 \to U$ e $u_2 : J_2 \to U$ sono soluzioni locali di (4), allora $u_1(t) \equiv u_2(t)$ su $J_1 \cap J_2$.

Dim Per definizione di soluzione locale $t_0 \in J_1 \cap J_2$, che, quindi, è un intervallo aperto (non vuoto) di I_0.
Sia $(a,b) := I_1 \cap I_2 \subseteq I_0$ e definiamo

$$\beta := \sup \overbrace{\{ t \in [t_0, b) \mid u_1(s) = u_2(s), \forall t_0 \le s \le t \}}^{B}.$$

Ovviamente $t_0 \in B$ supponiamo, per assurdo, che $\beta < b$.



Per continuità $\underline{u_1(\beta) = u_2(\beta)} := \bar{u}$

Per $\exists$ locale $\exists\ \delta > 0 \ / \ \begin{cases} u' = f(u,t) \\ u(\beta) = \bar{u} \end{cases}$

ha soluzione unica su $(\beta-\delta, \beta+\delta)$.

$\Longrightarrow u_1 \equiv u_2$ su $(\beta-\delta, \underline{\beta+\delta})$: ma questo contraddice la definizione di β.

Discorso analogo per a. ∎

Def. (Estensione di soluzioni locali).

Siano $u_1 : \overset{\subseteq I_0}{J_1} \to U$ e $u_2 : \overset{\subseteq I_0}{J_2} \to U$ sol. loc di (3).

Allora $J_1 \cup J_2$ è un intervallo e possiamo definire la funzione $u_1 \vee u_2 = u(t)$ come la soluzione locale di (4) data da

$$u(t) := \begin{cases} u_1 = u_2 & \text{su } J_1 \cap J_2 \\ u_1 & \text{su } J_1 \setminus J_2 \\ u_2 & \text{su } J_2 \setminus J_1 \end{cases}$$

Quindi $u_1 \vee u_2$ è una soluzione locale di (4) che *estende* u_1 e u_2.

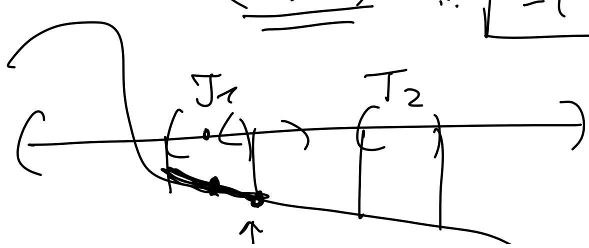
Def. (soluzione massimale di (3))

$$u : \bigvee_{v \in S_{loc}} v \quad \text{dove } S_{loc} := \{ v : \underset{J(v)}{J} \to U,\ \text{sol. loc di (4)} \}.$$

N.B. il dominio di definizione di u è $I := \bigcup_{\substack{J \text{ è un int.} \\ \text{di def. di sol. loc.}}} J = \bigcup_{v \in S_{loc}} J(v)$

e $I = I_{max}(u) :=$ l'intervallo massimale di $\exists$ di sol. loc.

$= \underline{(T_-, T_+)}$. N.B.: $\boxed{T_\pm(u_0, t_0)}$



Es. Calcolare $T_\pm(u_0, t_0)$ nel caso $\dot{u} = u^2$

$f(u,t) = u^2 \qquad f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.