lunedì 9 novembre 2020 15:59

Equ. diff. lineari a coeff. non costanti
(caso scalare di ordine superiore al secondo e il caso vettoriale)

Es. Risolvere $\dddot{x} - 2\ddot{x} - \dot{x} + 2x = 0$ (1)

Cerchiamo soluzioni esponenziali (complesse)

$x = e^{\lambda t}$, $(\lambda \in \mathbb{C}) \longrightarrow$ $P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$.

($e^{\lambda t}$ è sol. di (1) $\iff$ $P = 0$.)

N.B. Se $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ $\lambda = \alpha + i\beta$

$e^{\alpha t} \cos \beta t$ e $e^{\alpha t} \sin \beta t$ sono due soluzioni indipendenti $\left(e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t) \right)$

$P(\lambda) = 0$.

$$
\begin{array}{l|l}
\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 & \lambda - 1 \\
\cline{2-2}
\lambda^3 - \lambda^2 & \lambda^2 - \lambda - 2 \\
\hline
-\lambda^2 - \lambda + 2 & \\
-\lambda^2 + \lambda & \\
\hline
-2\lambda + 2 &
\end{array}
$$

$(\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 2)$

$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1)$

$\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-1$

La soluz. generale è data da

$$x(t)=c_1e^{t}+c_2e^{-t}+c_3e^{2t}$$

NON RISONANTE

Es. $\underbrace{\dddot{x}-3\ddot{x}+5\dot{x}-3x}=2e^{at}$, $a=2,1$ (2)

RISONANTE

$P(\lambda)$ = pol. caratt. dell'equaz. omogenea è

$$P(\lambda)=\lambda^3-3\lambda^2+5\lambda-3=0$$

$\lambda_1=1$ è radice

$$(\lambda^2+a\lambda+b)(\lambda-1)=\lambda^3+\lambda^2(-1+a)+\lambda(b-a)-b$$

$b=3$ $\quad 3-a=5$, $a=-2$

$$\underline{(\lambda^2-2\lambda+3)}(\lambda-1)=(\lambda-1)(\lambda-\lambda_+)(\lambda-\lambda_-)$$

$$\lambda_\pm=1\pm\sqrt{1-3}=1\pm i\sqrt{2}$$

La soluzione generale dell'equaz. omogenea è

$$x_0(t)=c_1e^{t}+c_2e^{t}\cos(\sqrt{2}t)+c_3e^{t}\sin(\sqrt{2}t)$$

Cerco una soluzione della forma ce^{at} di (2) direttamente.

$$c\,P(a)\,\cancel{e^{at}} = 2\,\cancel{e^{at}}\,, \qquad c\,P(a) = 2$$

se $a=2$, ($\underline{P(2)\neq 0}$) $\Rightarrow$ $c = \dfrac{2}{P(2)} = \dfrac{2}{3}$

$x_p(t) = \frac{2}{3}e^{2t}$ e la soluzione generale di (2) è

$$x_0(t) + x_p(t).$$

NON RISONANTE $\Leftrightarrow$ $P(a)\neq 0$.

<u>CASO RISONANTE</u> : bisogna cercare una soluzione particolare della forma $x(t) = Q(t)\cdot e^{at}$

$x(t) = \underline{c\,t\,e^{t}}$

$\dot{x} = \underline{c t e^{t}} + c e^{t}$

$\ddot{x} = x + ce^{t} + ce^{t} = \underline{x + 2ce^{t}}$

$\dddot{x} = x + 3ce^{t}$

$$x + 3\underline{ce^{t}} - 3\left(x + 2ce^{t}\right) + 5\left(x + ce^{t}\right) - 3x = 2e^{t}$$

$$3c - 6c + 5c = 2$$

$$2c = 2\,, \quad \underline{c = 1}$$

$\underline{x_p(t) = t e^{t}}$.

Perché le soluzioni risonanti hanno coefficienti polinomiali in t?

$$Lx = e^{at} \qquad x = e^{\lambda t}$$

$$P(\lambda)\, e^{\lambda t} = e^{at}$$, a dato, $\lambda \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$

Se $P(a) = 0$, $x = e^{at}$ non è soluzione

$$P(\lambda) = (\lambda - a)^d\, Q(\lambda), \quad Q(a) \neq 0$$

$$(\lambda - a)^d\, Q(\lambda)\, e^{\lambda t} = e^{at}$$

Caso $d = 1$

$$L[e^{\lambda t}] = (\lambda - a)\, Q(\lambda)\, e^{\lambda t}$$

$$= \left(Q(\lambda)\, e^{\lambda t} + (\lambda - a)\, Q'(\lambda)\, e^{\lambda t} + (\lambda - a) Q\, t\, e^{\lambda t}\right)$$

$$\Rightarrow D_\lambda L[e^{\lambda t}] = L[D_\lambda e^{\lambda t}] = L[t e^{\lambda t}]$$

$$\| $$

$$\left(Q(\lambda)\, e^{\lambda t} + (\lambda - a)\cdot g\right)$$

$$L[t e^{at}] = Q(a)\, e^{at} \qquad Q(a) \neq 0.$$

$$L\left[\frac{t}{Q(a)} e^{at}\right] = e^{at}.$$

Es. $\boxed{\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 4x_2 \end{cases}}$ $\qquad \boxed{\dot{x} = A(t)\, x}$ $\quad x = x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} x$$

$$P(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(4-\lambda) + 2$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$$= \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A$$

$$P(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-3)$$

$$(A-\lambda I)u = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} u = 0 \qquad u_1 + u_2 = 0.$$

$$u = (1, -1)$$

$$2v_1 + v_2 = 0.$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} v = 0 \qquad v = (1, -2)$$

$$x^{(1)} = e^{2t} u, \qquad x^{(2)} = e^{3t} v$$

$$x = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)}.$$

$$\dot{x} = Ax \qquad x = e^{\lambda t}\bar{x}$$

$$\lambda \cancel{e^{\lambda t}} \bar{x} = \cancel{e^{\lambda t}} A\bar{x} \iff (A-\lambda I)\bar{x} = 0.$$

$$\iff \lambda \in \sigma(A) \text{ e } \bar{x} \in \operatorname{Ker}(A-\lambda I),$$

$A \in \mathrm{Mat}(n \times n).$

Oss. fondamentale.

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$ converge in norma $\|\cdot\|$.

$$\left(\|A\| := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{|Ax|}{|x|} \right.$$ dove $|\cdot|$ è una norma data in $\mathbb{R}^n$ $\Big)$

Ad esempio, $|x| := \max |x_i| = \|x\|_\infty$.

$$\frac{d}{dt} \exp(At) = \lim_{h \to 0} \frac{\exp(A(t+h)) - \exp At}{h}$$

$$= A e^{At} = e^{At} \cdot A. \qquad (*)$$

$\dot{x} = Ax$

$x(t) = e^{At} x_0 \longrightarrow$ la soluzione di $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0. \end{cases}$

$\dot{x} = A(e^{At} x_0) = Ax$

$x(0) = x_0.$