mercoledì 9 dicembre 2020 16:13

ES.* ((SA) $\not\Rightarrow$ (SL)) [Teschl. Ordinary Differential equations and dynamical systems. AMS Graduate Studies in Math. Vol. 140]

Probl. 6.16 p. 200 [Teschl]

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2+y^2) + \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dot{y} = x + y - y(x^2+y^2) - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

Mostrare che $(x_0,y_0)=(1,0)$ NON è stabile ma soddisfa (SA) cioè $\exists$ un intorno U di (x_0,y_0) | $\lim |\Phi^t(x,y) - (x_0,y_0)| = 0$ $\forall\ x \in U$. (SA)

[Sugg. usare le coordinate polari
$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$
$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - (r\sin\theta)\dot{\theta}$ . ...]

4.) $\underline{\dot{x} = f(x)}$ $\qquad x \in A \subseteq \mathbb{R}^n$ $\qquad$ (1)
ap. connesso

$f \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$

(1) è un sistema "conservativo" cioè $\exists$ una funzione $E : x \in A \mapsto E(x) \in \mathbb{R}$ di classe C^1 costante sui moti di (1)

$E(\Phi(t,x)) = E(\Phi(0,x)) = E(x)$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$.

Esempio sistemi meccanici

$$\dot z = F(z) = (y, -V'(x)) \qquad \text{con } V \in C^2(A, \mathbb{R})$$

$$z = (x,y) \in \mathbb{R}^{2n}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \dot x = y \\ \dot y = -V'(x) \end{cases} \iff \underline{\ddot x + V'(x) = 0.} \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

$$E(z) = E(x,y) = \frac{1}{2}|y|^2 + V(x)$$

$$\frac{1}{2} y \cdot y = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n y_j^2$$

Teorema Se $x_0 \in A$ è un equilibrio per (1) ($\iff f(x_0) = 0$) e x_0 è un minimo locale stretto per $E \implies$ $\underline{x_0 \text{ è stabile}}$ nel futuro e nel passato (non asint. stabile)

Dim. Sia $\varepsilon > 0 \mid \overline{B_\varepsilon(x_0)} \subseteq A$ e che,

se $c_0 := E(x_0)$,

$$E(x_0) = c_0 < E(x), \quad \forall\, 0 < |x - x_0| \leq \varepsilon$$

sia $c_\varepsilon := \min\limits_{|x-x_0| = \varepsilon} E(x) > c_0$ (teo. Weierstrass) e

sia $c_0 < c < c_\varepsilon$.

$$\exists\, \delta > 0 \mid \quad B_\delta(x_0) \subseteq \{x \in B_\varepsilon(x_0) \mid E(x) < c\} \qquad (2)$$

$$\implies \max_{B_\delta(x_0)} E(x) \leq c < c_\varepsilon$$

se $x \in B_\delta(x_0) \overset{?}{\implies} |\Phi(t,x) - x_0| < \varepsilon, \ \forall t \geq 0$

se così non fosse $\exists\, t_* > 0 \mid$

$$\begin{cases} |\phi(t_+,x) - x_0| = \varepsilon \\ |\phi(t,x) - x_0| < \varepsilon \quad \forall\ 0 \le t < t_+ \end{cases}$$

$$\left(t_+ = \sup \{ t \ge 0 \mid \phi(s,x) \in \underline{\underline{B_\varepsilon(x_0)}}\ \forall\ 0 \le s \le t \} \right)$$

Ma allora

$$E(\phi(t,x)) = E(\phi(0,x)) = E(x) < c < c_\varepsilon$$

$$\overset{\shortparallel}{E}(\underset{\in\, \partial B_\varepsilon(x_0)}{\underline{\underline{\phi(t_+,x)}}}) \ge c_\varepsilon \quad (\text{definizione di } c_\varepsilon)$$

contraddizione.

Analogamente, se poniamo

$$t_- = \inf \{ t \le 0 \mid \phi(s,x) \in B_\varepsilon(x_0)\ \forall\ t \le s \le 0 \}$$

Allora se $t_+ < \infty \Rightarrow |\phi(t_+,x) - x_0| = \varepsilon$

se $t_- > -\infty \Rightarrow |\phi(t_-,x) - x_0| = \varepsilon.$

ed entrambi i casi portano ad una contraddizione. ∎

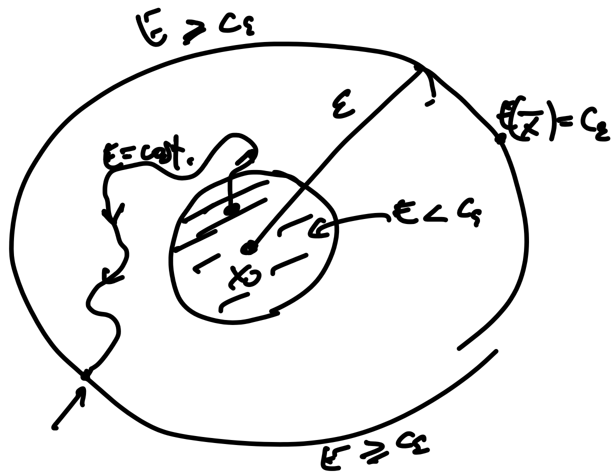
N.B. x_0 non può essere asint. stabile

se lo fosse $\exists\ \delta > 0 \mid x \in B_\delta(x_0)$

$$\Rightarrow \lim \phi(t,x) = x_0$$

$$\Rightarrow E(\phi(t,x)) \to E(x_0)$$

$$E(\phi(t,x)) > E(x_0) \quad \text{se } \underline{\phi(t,x) \ne x_0}.$$



Stabilità esponenziale per linearizzazione

$f \in C^1(B, \mathbb{R}^n)$ B aperto di $\mathbb{R}^n$

$B = B_r(0)$ e che 0 sia un equilibrio

per $\dot{x} = f(x)$ $\quad f(0) = 0$ $\quad (0 = x_0)$

non è importante

Per Taylor $f(x) = \underset{0}{f(0)} + \underbrace{f'(0)}_{A} x + R(x)$

con $R = o(x)$ ovvia $\frac{R(x)}{|x|} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

Quindi $f(x) \simeq Ax$, x vicino a 0.

Teorema Siano f ed A come sopra e supponiamo che $\text{Re}\,\lambda_i < 0$ $\forall \lambda_i \in \sigma(A) \Rightarrow 0$ è asint. stabile nel futuro.

Infatti, $\forall \alpha \mid \text{Re}\,\lambda_i < \alpha < 0$, $\exists \bar{\delta} > 0 \mid \forall \delta_0 \leq \bar{\delta}$ $\exists 0 < \delta \leq \delta_0 \mid$ se $|x_0| < \delta$ allora

$$|\phi(t, x_0)| \leq \delta_0 e^{\alpha t} \quad \forall t \geq 0 \quad -(3)$$

---

(3) $\Rightarrow$ stabilità $\forall t \geq 0$

$$|\phi(t,x_0)| \le \delta_0 e^{\alpha t} \le \underline{\delta_0}$$

(3) $\Rightarrow$ $|\phi(t,x_0)| \to 0$ per $t \to +\infty$ con velocità esp. $e^{\alpha t}$

Lemma $A \in Mat(n\times n)$ con $Re\,\lambda_i < 0$ $\forall\, \lambda_i \in \sigma(A)$. Allora $\exists\; C_0>0$ |

$$\|e^{At}\| \le C_0\, \underline{e^{\alpha_0 t}\cdot \max\{1, t^{n-1}\}}, \quad \forall\, t \ge 0,$$

dove $\alpha_0 = \max_i\{Re\,\lambda_i\} < 0$.

Dim Per Jordan $\exists\, U$ inv. |

$\underline{U^{-1} A U = J}$ con J forma di Jordan

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_m \end{pmatrix} \qquad J_k = \lambda_k I + N_k \in Mat(n_k \times n_k)$$

$$N_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

(Convenzioni $\underline{\|A\| = \sup_{|v|=1} |Av|}$, $|e^{i\eta}| = 1$)

$$\|e^{At}\| = \|e^{tUJU^{-1}}\| = \|U e^{tJ} U^{-1}\|$$

$$\le \|U\|\,\|U^{-1}\|\,\|e^{tJ}\|$$

$$= \|U\|\cdot\|U^{-1}\| \max_k \|e^{tJ_k}\|$$

$$\|e^{tJ_k}\| = \|e^{t\lambda_k I}\, e^{tN_k}\|$$

$$\| e \| = \| e \cdot e \|$$

$$\le \|e^{t\lambda_i I}\| \cdot \|e^{tN_i}\|$$

$$= e^{(\mathrm{Re}\lambda_i)t}\, \|e^{tN}\|$$

$$\left\| \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \right\| = \sup_{|v|\le 1} |e^{\lambda t} v| = \sup_{|v|=1} |e^{\lambda t}|\, \underbrace{|v|}_{=1} = |e^{\lambda t}| = e^{(\mathrm{Re}\lambda)t}$$

$$e^{tN} = I + tN + \dots + \frac{(tN)^{d-1}}{(d-1)!} \qquad d = \mathrm{ord}(N) \le n.$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{d-1}}{(d-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & 0 & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|e^{tN}\| \le C \max\{1, t^{n-1}\}, \quad t \ge 0, \quad C = C(n)$$

$$e^{(\mathrm{Re}\lambda)t} \le e^{\alpha_0 t} \qquad \alpha_0 = \max(\mathrm{Re}\lambda_i). \blacksquare$$

Dim teorema

Ricordiamo la formula di Duhamel (variazione delle costanti)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + G(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$e^{A(t-t_0)} \quad \int^{t} e^{A(t-s)} G(s)\, ds$$

$x(t) = e \quad x_0 + \int_{t_0} \quad \ldots$

(infatti $x(t_0) = x_0$,

$$\dot{x} = \underbrace{A e^{A(t-t_0)} x_0} + G(t) + \underbrace{\int_{t_0}^{t} A e^{A(t-s)} G(s)\, ds}$$

$$= A x + G(t) \;)$$

siano $\underbrace{|\mathrm{Re}\, \lambda_i|} < \bar{\alpha} < \alpha < 0$. Dal lemma

segue che $\exists\ c_1 \mid \| e^{At} \| \le c_1 e^{\bar{\alpha} t}$, $\underline{\forall t \ge 0}$

$\underline{c_1 = c_1(\alpha_0, n)}$

($\|e^{At}\| \le c_0 \underline{e^{\alpha_0 t} \max\{ t^{n-1}, 1\}} \le c_1 e^{\bar{\alpha} t} \quad \forall t \ge 0$)

sia $\bar{\delta} > 0 \mid$

$$\underline{|R(x)| \le \varepsilon |x| \quad \forall \quad |x| \le \bar{\delta}}$$

con $\varepsilon = \dfrac{\alpha - \bar{\alpha}}{c_1}$. sia $0 < \delta_0 \le \bar{\delta}$

sia $x(t) = \phi(t, x_0)$ con $|x_0| \le \delta \le \delta_0$

con $\underline{\delta := \min \left\{ \delta_0, \dfrac{\delta_0}{c_1} \right\}}$

$$\dot{x} = A x + \underset{g(\phi(t,x_0))}{g(x)} =: A x + \underline{G(t)}$$

$\underline{t_0 = 0}$.

$$|x| = \left| e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} \underline{G(s)}\, ds \right|$$

$$\le c_1 e^{\bar{\alpha} t} \delta + c_1 \int_0^t e^{\bar{\alpha}(t-s)} \varepsilon |x(s)|\, ds$$

Lemma

$$\underbrace{|x(t)|e^{-\bar{\alpha}t}} \le \underline{c_1}\delta + \varepsilon c_1 \int_0^t \underbrace{e^{-\bar{\alpha}s}|x(s)|}\,ds$$

Gronwell

$$\Longrightarrow \quad |x(t)|e^{-\bar{\alpha}t} \le c_1\delta\, e^{\varepsilon c_1 t}$$

$$\Leftrightarrow \quad |x(t)| \le c_1\delta\, e^{(\underbrace{\bar{\alpha}+\varepsilon c_1}_{\alpha})t}$$

$$= c_1\delta\, e^{\alpha t} \le \delta_0 e^{\alpha t}. \quad \boxtimes$$

$$\bar{\alpha} + \varepsilon c_1 = \alpha, \quad \varepsilon = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{c_1}$$