

**Esame scritto – 21/1/21**

- Indicare in cima all'elaborato da consegnare: nome, cognome, n. matricola (o n. documento).
  - Il punteggio totale è in centesimi; il punteggio di ogni singolo esercizio è indicato tra parentesi quadrate.
  - La prova ha la durata di 3 ore ed è a 'libri chiusi' (e cellulari spenti!)
  - Le risposte vanno sempre motivate chiaramente e sinteticamente!
- Risposte senza giustificazioni non danno punteggio.**

**Es 1 [Pt. 60]** Risolvere le seguenti equazioni differenziali:

(a)  $\dot{x} = \frac{x^2 - tx}{t^2}$ ,  $x(1) = 1$ .

(b) Determinare  $\alpha$  cosicché l'equazione differenziale  $\alpha xy dx + (x^2 + y^2) dy = 0$  sia esatta. Per tale  $\alpha$  risolvere l'equazione  $y' = -\alpha \frac{xy}{x^2 + y^2}$ ,  $y(0) = 1$ , dove  $y = y(x)$ .

(c) Sia  $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ . Trovare due soluzioni indipendenti di  $\dot{x} = Ax$  e calcolarne il wronskiano. Determinare la stabilità dell'equilibrio  $x = 0$ .

**Es 2 [Pt. 10]** Sia  $x : t \in [0, +\infty) \mapsto x(t)$  la soluzione di  $\dot{x} = 1 + x^4$ ,  $x(0) = 0$ . Dimostrare che  $x(t) > 0$  per ogni  $t > 0$ .

**Es 3 [Pt. 10]** Dimostrare che l'equilibrio  $x(t) \equiv 0$  dell'equazione  $\ddot{x} + \dot{x} - x = 0$  è instabile.

**Es 4 [Pt 20]** Fare il ritratto di fase dell'equazione  $\ddot{x} + 4x^3 - 2x = 0$  e determinare, in particolare, punti di equilibrio e la loro stabilità, orbite periodiche, orbite omo/eterocline.