<u>Es 1</u> (a): Ponendo $z = \frac{x}{t}$, si ha $\dot x = z + t\dot z$. Quindi (a) è equivalente

$$\begin{cases}\dot z = \frac{z^2-2z}{t}\\ z(1)=1\end{cases} \iff \int_1^z \frac{dy}{y^2-2y} = \log t \quad \text{(separazione di variabili)}$$

e $\int_1^z \frac{dy}{y^2-2y} = \frac12 \log\frac{2-z}{z}$, da cui $\sqrt{\frac{2-z}{z}} = t \Rightarrow z = \frac{2}{1+t^2} \Rightarrow x(t) = \frac{2t}{1+t^2}$.

(b) $\alpha=2$. Sia $F \mid F_x\,dx + F_y\,dy = 2xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy$. $\Rightarrow F_x = 2xy \Rightarrow$

$F = x^2y + \varphi(y)$; $F_y = x^2+y^2 \Rightarrow \varphi' = y^2 \Rightarrow \varphi = \frac{y^3}{3} \Rightarrow F := x^2y+\frac{y^3}{3}$ è una primitiva e la soluzione è implicitamente determinata da

$$F(x,y) = c = F(0,1) = \frac13 \iff x^2y + \frac{y^3}{3} = \frac13 \Rightarrow$$

$x \to y(x)$ è definita implicitamente da tale relazione in un intorno di $(x,y)=(0,1)$.

(c) $\det(A-\lambda I) = \lambda^2-2\lambda+1 \Rightarrow \sigma(A)=\{1\}$ e $\lambda:=1$ è un autovalore doppio, (molteplicità algebrica 2). $v = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ è un autovettore ($Av = v$).

$\Rightarrow$ una soluzione di $\dot x = Ax$ è data da $x^{(1)}(t) := \begin{pmatrix}2e^t\\ e^t\end{pmatrix}$.

Calcolo autovettore generalizzato: $(A-I)w = v \Leftarrow w = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ una seconda soluzione (indipendente) è data da $x^{(2)}(t) = (w+tv)e^{\lambda t}$

$= \begin{pmatrix}(-1+2t)e^t\\ te^t\end{pmatrix}$. Il wronskiano di $x^{(1)}, x^{(2)}$ è dato da $\det[x^{(1)}, x^{(2)}] = e^{2t}$.

Essendo $\forall \varepsilon>0$ $x_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix}2\varepsilon\\ \varepsilon\end{pmatrix}e^t$ una soluzione tale che $|x_\varepsilon(t)| \to +\infty$ per $t\to+\infty$

$x_0 := 0$ è un equilibrio instabile.

<u>ES2</u> $\dot x(t) > 0 \Rightarrow x$ è strett. crescente per $t>0 \Rightarrow x(t)>0$ $\forall t>0$

Oppure $x(t) = \int_0^t 1+x^4 > t > 0$, $\forall t>0$.

<u>Es3</u>. Polinomio caratteristico dell'equazione è $P(\lambda) := \lambda^3+\lambda-1$ e

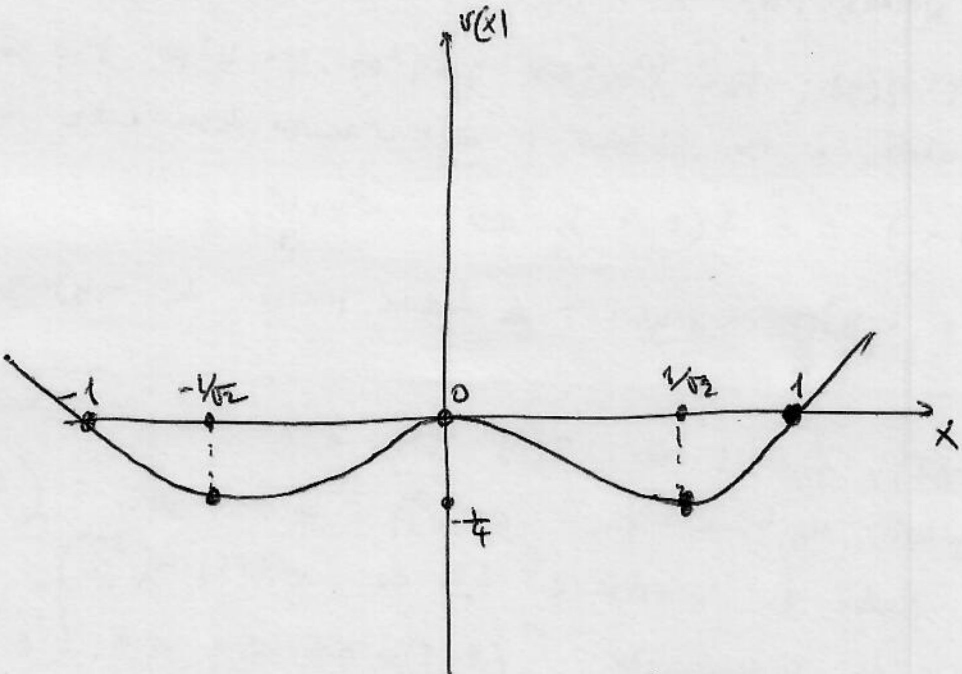
$P(0)=-1$ e $P(\lambda) \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} +\infty \Rightarrow \exists \lambda_0>0 \mid P(\lambda_0)=0 \Rightarrow \varepsilon e^{\lambda_0 t}$ è soluzione $\forall \varepsilon>0$

$\Rightarrow x(t)=0$ è un equilibrio instabile.

Es 4 L'equazione è conservativa potendosi scrivere come

$$\ddot{x} + V'(x) = 0 \quad \text{con } V(x) = x^4 - x^2 = x^2(x^2-1),$$ il

cui grafico è dato da:



Da cui segue il seguente ritratto di fase:

Energia: $\frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) = \frac{1}{2}y^2 + V(x) = c$