

1 Il Teorema di Hartman-Grobman per flussi

Richiamiamo l'enunciato del teorema di Hartman-Grobman per mappe¹:

Teorema 1 (Hartman-Grobman per mappe) Sia $F \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ della forma

$$F(x) = Lx + G(x) \quad (1)$$

con $L = L_+ \oplus L_-$, $L_{\pm} \in \mathbb{R}^{n_{\pm} \times n_{\pm}}$ ($n_+ + n_- = n$) invertibile e tale che²

$$\max\{\|L_+\|_+, \|L_-^{-1}\|_-\} \leq \alpha < 1, \quad (2)$$

e G limitata e tale che

$$|G(x) - G(y)| \leq \varepsilon |x - y|, \quad \text{con } \varepsilon < 1 - \alpha. \quad (3)$$

Assumiamo anche che $F(0) = 0$ e che F sia invertibile. Allora esiste un unico omeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ della forma $\varphi(x) = x + \psi(x)$ con ψ limitata tale che

$$\varphi^{-1} \circ F \circ \varphi = L \quad \text{o, equivalentemente,} \quad \varphi \circ L = F \circ \varphi. \quad (4)$$

Inoltre, $\psi(0) = 0$ e

$$\|\psi\|_{\infty} \leq \|L^{-1}\| \|G\|_{\infty}. \quad (5)$$

Ricordiamo anche che vale il seguente risultato di rigidità

Lemma 2 Sia L come nell'enunciato del Teorema 1 e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Esiste al più un omeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ della forma $\varphi(x) = x + \psi(x)$ con ψ limitata tale che³

$$\varphi \circ L = f \circ \varphi. \quad (6)$$

Teorema 3 (Hartman-Grobman per flussi) Sia f una funzione C^1 in un intorno di $0 \in \mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}^n$ tale che $f(0) = 0$ e $A = f'(0)$ sia una matrice iperbolica⁴, e sia $\phi_t(x)$ il flusso dell'equazione differenziale⁵ $\dot{x} = f(x)$. Allora, esiste $\delta > 0$ ed un omeomorfismo di $\mathbb{R}^n$ $\varphi(x) = x + \psi(x)$, con ψ limitata, tale che⁶

$$\phi_t = \varphi \circ e^{At} \circ \varphi^{-1}, \quad \forall x \in B_{\delta}, \quad \forall t \in I_{\delta}. \quad (7)$$

dove $I_{\delta} = I_{\delta}(x)$ è l'intervallo massimale tale che $\phi_t(x) \in B_{\delta}$ per ogni $t \in I_{\delta}$.

Dimostrazione

1) Dalle ipotesi segue che esiste $r > 0$ tale che

$$f(x) = Ax + g(x), \quad \text{con } g \in C^1(B_r) \text{ e } g(0) = 0 = g'(0). \quad (8)$$

Inoltre, a meno di un opportuno cambiamento di coordinate lineare, possiamo assumere che

$$A = A_+ \oplus A_-$$

con $\sigma(A_{\pm}) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid \pm \operatorname{Re} z < 0\}$. In tal caso, se $L := e^A$, si ha anche lo splitting

$$L = L_+ \oplus L_- := e^{A_+} \oplus e^{A_-},$$

¹Cfr. [T, Lemma 9.7]

²Le norme matriciali $\|\cdot\|_{\pm}$ sono indotte da opportune norme $|\cdot|_{\pm}$ su $\mathbb{R}^{n_{\pm}}$; la norma $|\cdot|$ su $\mathbb{R}^n$ è data da $|x| = |(x^+, x^-)| = \max\{|x^+|_+, |x^-|_-\}$, dove x^+ è il vettore delle prime n_+ coordinate di x e x^- quello delle altre n_- coordinate di x . La norma matriciale $\|\cdot\|$ su $\mathbb{R}^{n \times n}$ è quella indotta da $|\cdot|$. Infine, $\|\cdot\|_{\infty}$ denota la norma del sup di funzioni su $\mathbb{R}^n$.

³Ovviamente, in generale la (6) non ha soluzioni (per esempio se f è limitata).

⁴Ossia A non ha autovalori con parte reale nulla.

⁵Ossia, $x(t) = \phi_t(x)$ è l'unica soluzione di $\dot{x}(t) = f(x(t))$ e $x(0) = x$.

⁶ $B_{\delta} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \delta\}$ è la sfera aperta di raggio δ e centro 0.

con $\sigma(L_{\pm}) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^{\pm 1} < 1\}$.

Possiamo anche assumere che le norme siano come quelle nel Teorema 1 e che valga la (2).

2) Sia $\chi \in C^1(\mathbb{R}, [0, 1])$ una funzione di cut-off con supporto uguale a $[-2, 2]$, che vale 1 su $[-1, 1]$ e con⁷ $\sup |\chi'| \leq 2$.

Per ogni $\delta > 0$ definiamo poi la funzione di cut-off su $\mathbb{R}^n$ data da $\chi_{\delta}(x) := \chi(|x|/\delta)$. Si noti che χ_{δ} è una funzione lipschitziana da $\mathbb{R}^n$ in $[0, 1]$ con supporto uguale a $\overline{B}_{2\delta}$, e che soddisfa

$$|\chi_{\delta}(x) - \chi_{\delta}(y)| \leq \frac{2}{\delta} |x - y|. \quad (9)$$

Ora, per ogni $0 < \delta \leq r/2$ poniamo

$$\tilde{g}(x) = \tilde{g}_{\delta}(x) := \begin{cases} \chi_{\delta}(x)g(x), & \text{se } |x| < 2\delta \\ 0, & \text{se } |x| \geq 2\delta. \end{cases} \quad (10)$$

Poiché $g \in C^1(B_r)$ e $g'(0) = 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) < r/2$ tale che

$$|g(x) - g(y)| \leq \frac{\varepsilon}{8c} |x - y|, \quad c := e^{3\|A\|}, \quad \forall x, y \in B_{2\delta_0}. \quad (11)$$

Si noti che per $y = 0$ (essendo $g(0) = 0$) si ha

$$|g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{8c} |x|, \quad \forall x \in B_{2\delta_0}, \quad (12)$$

e quindi

$$\|\tilde{g}\|_{\infty} \leq \frac{\delta}{4c} \varepsilon, \quad \forall 0 < \delta \leq \delta_0. \quad (13)$$

Lemma 4 Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $0 < \delta \leq \delta_0$ si ha

$$|\tilde{g}(x) - \tilde{g}(y)| \leq \frac{\varepsilon}{c} |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad (c = e^{3\|A\|}). \quad (14)$$

Dimostrazione Ci sono tre casi: (i) $|x|, |y| \geq 2\delta$, (ii) $|x| < 2\delta \leq |y|$ (o, viceversa); (iii) $|x|, |y| < 2\delta$. Nel caso (i), $\tilde{g}_{\delta}(x) = \tilde{g}_{\delta}(y) = 0$ e la (14) è banalmente vera.

(ii) Essendo $\tilde{g}(y) = 0 = \chi_{\delta}(y)$ e $|x| < 2\delta \leq 2\delta_0$, si ha:

$$\begin{aligned} |\tilde{g}(x) - \tilde{g}(y)| &= |\tilde{g}(x)| = |\chi_{\delta}(x) - \chi_{\delta}(y)| |g(x)| \stackrel{(9)}{\leq} \frac{2}{\delta} |g(x)| |x - y| \\ &\stackrel{(12)}{\leq} \frac{\varepsilon}{4c} \frac{|x|}{\delta} |x - y| \leq \frac{\varepsilon}{2c} |x - y| \leq \frac{\varepsilon}{c} |x - y|. \end{aligned}$$

(iii) Essendo $0 \leq \chi_{\delta}(y) \leq 1$, da (9), (12) e (11), segue

$$\begin{aligned} |\tilde{g}(x) - \tilde{g}(y)| &\leq |\chi_{\delta}(x) - \chi_{\delta}(y)| |g(x)| + |\chi_{\delta}(y)(g(x) - g(y))| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2c} |x - y| + \frac{\varepsilon}{8c} |x - y| \leq \frac{\varepsilon}{c} |x - y| \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Sia ora

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_{\delta}(x) := Ax + \tilde{g}(x)$$

e denotiamo con $\phi_t = \phi_t(x)$ il flusso dell'equazione differenziale $\dot{x}(t) = \tilde{f}(x(t))$, $x(0) = x$ (tale flusso è definito per ogni $t \in \mathbb{R}$).

⁷La funzione χ può essere definita come segue: sia $\xi_0(t)$ la funzione che vale 0 se $t \notin [0, 1]$, vale t su $[0, 1/2]$ e vale $1 - t$ su $[1/2, 1]$; sia $\xi(t) = 4 \int_{-\infty}^t \xi_0(s) ds$. Allora, $\chi(t) := \xi(1+t)\xi(1-t)$ (Esercizio).

Osservazione 5 $\tilde{f} = f$ su B_δ e quindi i flussi generati da $\tilde{f}$ e f coincidono se il dato iniziale x è in B_δ e $t \in I_\delta(x)$.

3) Definiamo ora la mappa $x \in \mathbb{R}^n \mapsto F(x) := \phi_1(x) \in \mathbb{R}^n$. Per “variazioni delle costanti”, si ha che

$$\phi_t(x) = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}\tilde{g} \circ \phi_s(x)ds \quad (15)$$

e, in particolare, per $t = 1$,

$$F(x) = \phi_1(x) = e^Ax + G(x), \quad \text{con} \quad G(x) := \int_0^1 e^{A(1-t)}\tilde{g} \circ \phi_t(x)dt. \quad (16)$$

Lemma 6 Sia $0 < \varepsilon < \|A\|$ e $0 < \delta \leq \delta_0 = \delta_0(\varepsilon)$. Allora, $G(0) = 0$ e

$$\|G\|_\infty \leq \frac{\delta}{4e^{2\|A\|}} \varepsilon; \quad (17)$$

$$G(x) = 0, \quad \forall |x| \geq 3\delta e^{\|A\|}; \quad (18)$$

$$|G(x) - G(y)| \leq \varepsilon|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (19)$$

Dimostrazione Poiché $\tilde{f}(0) = 0 = \tilde{g}(0)$, $\phi_t(0) = 0$ e quindi $G(0) = 0 = F(0)$.

La (17) segue immediatamente da (13) e la definizione di c in (11).

Dimostriamo (18). Per ogni $0 \leq t \leq 1$, $|x| = |e^{-At}e^{At}x| \leq e^{\|A\|}|e^{At}x|$ e quindi

$$|e^{At}x| \geq e^{-\|A\|}|x|, \quad \forall 0 \leq t \leq 1, \quad \forall x.$$

Ora, da (15) e (17) segue allora che, per $0 \leq t \leq 1$, per $|x| \geq 3\delta e^{\|A\|}$ e $\varepsilon < e^{\|A\|}$,

$$|\phi_t(x)| \geq e^{-\|A\|}|x| - e^{\|A\|}\frac{\delta}{4c}\varepsilon > 2\delta,$$

il che implica $G(x) = 0$ essendo $\tilde{g} = 0$ se $|x| \geq 2\delta$.

Resta da dimostrare la (19). Da (15) e (14), segue che, per ogni $0 \leq t \leq 1$,

$$|\phi_t(x) - \phi_t(y)| \leq e^{\|A\|}|x - y| + e^{-2\|A\|}\varepsilon \int_0^t |\phi_s(x) - \phi_s(y)|ds,$$

che, per Gronwall e per l'ipotesi $\varepsilon < \|A\|$, implica

$$|\phi_t(x) - \phi_t(y)| \leq e^{2\|A\|}|x - y|, \quad \forall 0 \leq t \leq 1, \quad \forall x, y. \quad (20)$$

La (19) segue ora immediatamente dalla definizione di G da (14) e (20). ■

Osservazione 7 (i) Da (18) segue che $F(x) = e^Ax$ per ogni $|x| \geq 3\delta e^{\|A\|}$.

(ii) Se $\varepsilon < e^{-\|A\|}$ si ha che F è invertibile⁸.

4) Assumiamo d'ora in poi che

$$0 < \varepsilon < \min \{1 - \alpha, \|A\|, e^{-\|A\|}\}. \quad (21)$$

Grazie a tale ipotesi possiamo applicare il Teorema 1 con $L = e^A$ e F e G come in (16). Quindi $F = \phi_1$ è invertibile, $F(0) = 0$ e valgono (4) e (5) e $\varphi = x + \psi$ come nel Teorema 1. Fissiamo t e definiamo il seguente omeomorfismo di $\mathbb{R}^n$:

$$\varphi_t := \phi_t \circ \varphi \circ e^{-tA}. \quad (22)$$

⁸Cfr. Es 1 del 30/10/24 su http://www.mat.uniroma3.it/users/chierchia/AM430_24_25/AM430_24_25.htm (si osservi che $\|e^{-A}\| \leq e^{\|A\|}$).

Si osservi che da (15) segue che φ_t è un omeomorfismo della forma

$$\varphi_t(x) = x + \psi_t(x), \quad \psi_t(x) := e^{At}\psi(e^{-At}x) + \int_0^t e^{A(t-s)}\tilde{g}(\phi_s(\varphi(e^{-tA}x)))ds,$$

e che $\psi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è limitata (essendo ψ e $\tilde{g}$ limitate). Ora,

$$\begin{aligned} \varphi_t \circ e^A &\stackrel{(22)}{=} \phi_t \circ \varphi \circ e^{-tA} e^A = \phi_t \circ \varphi \circ e^A e^{-tA} \stackrel{(4)}{=} \phi_t \circ \phi_1 \circ \varphi \circ e^{-tA} = \phi_1 \circ \phi_t \circ \varphi \circ e^{-tA} \\ &\stackrel{(22)}{=} \phi_1 \circ \varphi_t, \end{aligned}$$

e dunque, per l'osservazione precedente, e per il Lemma 2 segue che $\varphi_t = \varphi$ che equivale a (7) con ϕ_t flusso di $\tilde{f}$; ma, in vista dell'Osservazione 5, si ha la validità di (7) anche per il flusso ϕ_t di f per tutti le $t \in I_\delta(x)$. ■

Osservazione 8 Possiamo dare un enunciato più quantitativo del Teorema 3 dopo aver messo il sistema nella forma canonica descritta al punto 1) della dimostrazione. Infatti, da (5) e (17) segue che

Per ogni $\varepsilon > 0$ che soddisfa (21), esiste $0 < \delta_0 < r/2$ tale che, per ogni $0 < \delta \leq \delta_0$, vale (7) con un omeomorfismo di $\mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = x + \psi(x)$, che soddisfa

$$\|\psi\|_\infty \leq \frac{\delta}{4e^{\|A\|}} \varepsilon < \delta\varepsilon. \quad (23)$$