1 Soluzioni quasi–periodiche e serie di Lindstedt

(1) Sia $(H, \mathscr{M})$ un sistema Hamiltoniano "standard" con spazio delle fasi $\mathscr{M} := B \times \mathbb{T}^d$, B regione di $\mathbb{R}^d$ e Hamiltoniana $H \in C^\infty(\mathscr{M}, \mathbb{R})$; "standard" significa che si considera la varietà simplettica $\mathscr{M}$ rispetto alla due forma standard $\sum_i dy_i \wedge dx_i$ a cui si associano le equazioni di Hamilton standard[1]

$$\dot y = -\partial_x H\,, \qquad \dot x = \partial_y H\,. \tag{1}$$

Una **soluzione quasi–periodica** massimale con frequenza razionalmente indipendente $\omega \in \mathbb{R}^d$ per $(H, \mathscr{M})$ è una soluzione $\big(y(t), x(t)\big)$ di (1) della forma[2]

$$x(t) = \omega t + u(\omega t)\,, \qquad y(t) = v(\omega t)\,, \tag{2}$$

con $u, v \in C^\infty(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^d)$. È immediato verificare che $\big(y(t), x(t)\big)$ è una soluzione quasi–periodica se e solo se u e v verificano le seguenti equazioni alle derivate parziali su $\mathbb{T}^d$:

$$\begin{cases} D_\omega v = -\partial_x H(v, \theta + u) \\ \omega + D_\omega u = \partial_y H(v, \theta + u) \end{cases} \qquad\qquad D_\omega := \sum_{i=1}^d \omega_i \partial_{x_i}\,, \tag{3}$$

che chiameremo **equazioni di Lindstedt**. Date (v, u) come in (2), se denotiamo ϕ la mappa

$$\phi : \theta \in \mathbb{T}^d \mapsto \big(v(\theta), u(\theta + u(\theta)\big) \in \mathscr{M} \tag{4}$$

si ha che

$$(\phi_H^t \circ \phi)(\theta) = \phi(\theta + \omega t)\,, \qquad \forall \theta \in \mathbb{T}^d\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}\,. \tag{5}$$

dove ϕ_H^t denota il flusso Hamiltoniano generato da H; inoltre, se $\det(I + u_\theta) \neq 0$ su $\mathbb{T}^d$, allora ϕ definisce un'immersione $\mathscr{T}_\omega := \phi(\mathbb{T}^d)$ del toro $\mathbb{T}^d$ in $\mathscr{M}$ che può essere espresso come un grafico rispetto alle variabili $x \in \mathbb{T}^d$; $\mathscr{T}_\omega$, in vista di (5), è invariante per il flusso Hamiltoniano di H.

(2) Un **sistema Hamiltoniano quasi–integrabile** è un sistema Hamiltoniano standard su $\mathscr{M} := B \times \mathbb{T}^d$ con Hamiltoniana

$$H = H_\varepsilon(y, x) := h(y) + \varepsilon f(y, x)$$

con $h, f \in C^\infty(\mathscr{M})$; tale sistema si dice (Kolmogorov) **non degenere** se $\det h_{yy} \neq 0$ su B;

Una **serie di Lindstedt** con frequenza $\omega \in \mathbb{R}^d$ razionalmente indipendente, per il sistema quasi–integrabile $(\mathscr{M}, H_\varepsilon)$ è una coppia di serie formali

$$v(\theta; \varepsilon) \sim \sum_{j \geq 0} v_j(\theta) \varepsilon^j\,, \qquad u(\theta; \varepsilon) \sim \sum_{j \geq 0} u_j(\theta) \varepsilon^j\,,$$

con $v_j, u_j \in C^\infty(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^d)$ che verificano, nel senso delle serie formali in ε, le equazioni di Lindstedt (3).

Valgono le seguenti affermazioni[3]

(L) *Se H_ε è una Hamiltoniana quasi–integrabile, non–degenere e se*[4] $\partial_y h(y_0) =: \omega \in \mathscr{D}_{\gamma,\tau}$, *esiste una unica serie di Lindstedt (v, u) tale che $v_0 = y_0$, $u_0 = 0$ e, per ogni $j \geq 1$, $\langle u_j \rangle = 0$.*

(K) *Se H_ε è una Hamiltoniana real–analitica, quasi–integrabile, non–degenere con $\partial_y h(y_0) =: \omega \in \mathscr{D}_{\gamma,\tau}$, allora le serie di Lindstedt sono convergenti.*

---

[1] Il punto denota, come al solito, la derivata rispetto al tempo t, ∂_x denota il gradiente rispetto alle x e ∂_y il gradiente rispetto alle y.

[2] Più precisamente $x(t) = p(\omega t + u(\omega t))$ dove p denota la proiezione canonica di $\mathbb{R}^d$ su $\mathbb{T}^d$.

[3] **(L)** è elementare, cfr. Proposition 2.1 in http://www.mat.uniroma3.it/users/chierchia/REPRINTS/ASNSP94.pdf; **(K)** non lo è ed è un corollario del Teorema di Kolmogorov del 1954 che ha dato inizio alla teoria KAM(Kolmogorov, Arnold, Moser).

[4] Si ricorda che $\mathscr{D}_{\gamma,\tau} := \{\omega \in \mathbb{R}^d \big|\, |\omega \cdot k| \geq \kappa/|k|^\tau\,,\ \forall k \in \mathbb{Z}^d \backslash \{0\}\}$ e $\langle \cdot \rangle$ denota la media su $\mathbb{T}^d$.

(3) Un **sistema Hamiltoniano naturale** (o meccanico) è un sistema Hamiltoniano con spazio delle fasi $\mathscr{M} := B \times \mathbb{T}^d$, B regione di $\mathbb{R}^d$, e Hamiltoniana $H(y,x) := \frac{1}{2}|y|^2 + f(x)$, dove $|\cdot|$ è la norma Euclidea e f una funzione regolare su $\mathbb{T}^d$.

Esercizio 1 Si dimostri che $v(\theta;\varepsilon)$, $u(\theta;\varepsilon)$ sono le serie di Lindstedt con frequenza $\omega \in \mathscr{D}_{\gamma,\tau}$ per un sistema naturale quasi integrabile con Hamiltoniana $H_\varepsilon(y,x) := \frac{1}{2}|y|^2 + \varepsilon f(x)$ se e solo se u verifica

$$D_\omega^2 u = -f_x(\theta + u)\,, \qquad \langle u \rangle = 0\,, \tag{6}$$

e $v = D_\omega u$.

2 Serie di Lindstedt unidimensionali

Consideriamo un sistema Hamiltoniano naturale con un grado di libertà ($d = 1$), ossia una Hamiltoniana "tipo pendolo" della forma $H := \frac{1}{2}y^2 + f(x)$ con $f \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ ($S^1 := \mathbb{T}^1$). In tal caso le soluzioni "quasi–periodiche" con frequenza $\omega > 0$ sono *soluzioni periodiche* dell'equazioni di Hamilton di H di periodo $T := 2\pi/\omega$, le cui traiettorie sono topologicamente dei cerchi omotopicamente non banali (non contraibili) sul cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$; in altri termini, la traccia di tali traiettorie sono dei grafici su S^1.

Sia X lo spazio di Banach delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, 2π–periodiche a media nulla rispetto alla norma $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$. Sia (come nel caso generale) $D_\omega = \omega\partial_\theta$, (ossia, $D_\omega u = \omega u'$). Se $f \in X$ definiamo (come nel caso generale) $u := D_\omega^{-1} f$ come l'unica soluzione a media nulla di

$$D_\omega u = f\,, \qquad \langle u \rangle = 0\,. \tag{7}$$

Esercizio 2 (i) Dimostrare che se $u \in X$, allora

$$\|D_\omega^{-1} u\| \le c\|u\|\,, \qquad c = \frac{4\pi}{\omega}\,. \tag{8}$$

(ii) Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$ periodica di periodo 2π. Definiamo l'operatore non–lineare $\Phi : X \to X$ come segue[5]:

$$\Phi(u) := -D_\omega^{-2}\Big(f_x(\theta + u) + c_u\Big)\,, \qquad c_u := -\langle f_x(\theta + u)\rangle\,. \tag{9}$$

Trovare sotto quale condizione la mappa Φ è una contrazione su X.

(iii) Dimostrare che se $u \in X$ è un punto fisso di Φ, allora $u \in C^2$ e soddisfa (6) (in particolare $c_u = 0$!).

Dimostrare che se f è analitica e periodica di periodo 2π allora la serie di Lindstedt

$$D_\omega^2 u = -\varepsilon f_x(\theta + u)\,, \qquad \langle u \rangle = 0\,, \tag{10}$$

converge e trovare una stima inferiore del raggio di convergenza.

[5] $\theta + u$ denota la funzione $\theta \mapsto \theta + u(\theta)$.