Esercizi AM450 – 5/4/18

Es 13 (Spazi C^k). Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e se $f \in C^k(I)$ poniamo

$$\|f\|_{C^k(I)} := \sum_{j=0}^{k} \sup_I |f^{(j)}| \ .$$

Sia $X := \{f \in C^k(I)$ t.c. $\|F\|_{C^k(I)} < \infty$. Dimostrare che $(X, \|\cdot\|_{C^k(I)})$ è uno spazio di Banach.

Es 14 (Spazi C^∞). Sia I un intervallo chiuso di $\mathbb{R}$ e se $f \in C^\infty(I)$ poniamo

$$\rho_k(f) := \sup_I |f^{(k)}|$$

e se $f, g \in C^\infty(I)$

$$d(f,g) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \ \frac{\rho_k(f-g)}{1+\rho_k(f-g)} \ .$$

Dimostrare che $(C^\infty(I), d)$ è uno spazio metrico completo.

Es 15 Sia $X = [0,1]$ con la tolopogia σ dove i chiusi sono gli insiemi al più numerabili (ossia $A \in \sigma$ se e solo se A^c è (vuoto o) al più numerabile.
(i) Dimostrare che (X, σ) è T_1 ma non di Haussdorff.
(ii) Caratterizzare le successioni convergenti.
(iii) Trovare (se esiste) una rete $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tale che $x_\alpha \to x$ per ogni $x \in [0,1]$.