Soluzioni 2-AM4

Laura Di Gregorio

2 ottobre 2003

1. Perché l'integrale abbia senso deve essere $x \neq -1$.
Si osserva subito che $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$.
Ponendo

$$x + 1 = \sinh t$$

da cui segue che $dx = \cosh t dt$ e utilizzando la relazione nota

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}} &= \int \frac{\cosh t dt}{\cosh t \sinh^2 t} \\
&= \int \frac{dt}{\sinh^2 t} = -\coth t \\
&= -\frac{\cosh t}{\sinh t} = -\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}
\end{aligned}$$

con $x \neq -1$.

2. Scriviamo, per $x < 1$ o $x > 2$

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

e, ponendo $x - 1 = t$, otteniamo, per $t > 1$

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}} = \int \frac{dt}{t^{3/2}\sqrt{t-1}}.$$

A questo punto si può porre $t = \xi^2$ e si ottiene, per $|\xi| > 1$,

$$\int \frac{dt}{t^{3/2}\sqrt{t-1}} = 2\int \frac{d\xi}{\xi^2\sqrt{\xi^2-1}}.$$

Con la sostituzione

$$\xi = \cosh y$$

si ha dunque che $\xi > 1$ e si prenda, per esempio, $y > 0$,

$$2\int \frac{d\xi}{\xi^2\sqrt{\xi^2-1}} = 2\int \frac{dy}{\cosh^2 y} = 2\tanh y = 2\frac{\sinh y}{\cosh y}.$$

Sostituendo si ottiene

$$2\frac{\sinh y}{\cosh y} = 2\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\xi} = 2\frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t}} = 2\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}}$$

per $x > 2$.

3. Sia $-3 < x < 1$. Osserviamo che

$$4-(1+x)^2 = 3-2x-x^2.$$

Ponendo $1+x = 2\sin t$ si ottiene che

$$\begin{aligned} 2\int \sqrt{4-4\sin^2 t}\cos t\, dt &= 4\int \cos^2 t\, dt = 2\int (1+\cos 2t)\, dt \\ &= 2t + \sin 2t = 2t + 2\cos t \sin t \end{aligned}$$

Scrivendo il risultato in funzione di x, si ha

$$\int \sqrt{3-2x-x^2}\, dx = 2\arcsin\frac{x+1}{2} + (x+1)\sqrt{3-2x-x^2}$$

4. Per $x \geq 2$ si può fare la sostituzione $x = 2\cosh t$ e si ha che

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2-4}\, dx &= 2\int \sinh t\sqrt{4\cosh^2 t - 4}\, dt \\ &= 4\int \sinh^2 t\, dt = 2\int (\cosh 2t - 1)\, dt \\ &= \sinh 2t - 2t = 2\cosh t \sinh t - 2t \end{aligned}$$

dove nella terza uguaglianza è stata usata la relazione

$$\sinh^2 t = \frac{1}{2}(\cosh 2t - 1).$$

Sostituendo, per $x \geq 2$, si ottiene

$$\begin{aligned} 2\cosh t \sinh t - 2t &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2\ln\left|\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-4}\right| \\ &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2\ln\left|x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-4}\right| + \text{cost} \end{aligned}$$

5. Osserviamo che

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

e facciamo la sostituzione

$$\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sinh t.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x^2+x+1}\,dx &= \frac{3}{4}\int\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sinh t - \frac{1}{2}\right)\cosh^2 t\,dt \\ &= \frac{3}{4}\int\frac{\sqrt{3}}{2}\sinh t\cosh^2 t - \frac{1}{2}\int\cosh^2 t\,dt \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8}\cosh^3 t - \frac{3}{16}t - \frac{3}{16}\sinh t\cosh t \\ &= \frac{1}{3}(x^2+x+1)^{3/2} - \frac{3}{16}\ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right) \\ &\quad -\frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1} \end{aligned}$$