Soluzioni 7-AM4

Laura Di Gregorio

13 novembre 2003

SOL: Sappiamo che $\mathrm{Vol}(S_\varepsilon) = \int_{S_\varepsilon} dx$.
Sia $\psi(u,t) := \varphi(u) + t\nu'(u)$ dove $\nu'(u) = \pm\nu(u)$. Risulta $S_\varepsilon = \psi\big(U \times [0,\varepsilon]\big)$ e dalla formula del cambio di variabili

$$\int_{S_\varepsilon} dx = \int_{U\times[0,\varepsilon]} \left|\det\left(\frac{\partial\psi}{\partial(u,t)}\right)\right| du\, dt.$$

Si ha che, detto $u = (u_1, u_2)$

$$\begin{aligned}\det\left(\frac{\partial\psi}{\partial(u,t)}\right) &= \det[\partial_{u_1}\varphi + t\partial_{u_1}\nu', \partial_{u_2}\varphi + t\partial_{u_2}\nu', \nu'(u)] \\ &= \det[\partial_{u_1}\varphi, \partial_{u_2}\varphi, \nu'(u)] + at + bt^2\end{aligned}$$

per certi a e b.
Dalle proprietà del prodotto vettoriale segue che

$$\big|\det[\partial_{u_1}\varphi, \partial_{u_2}\varphi, \nu'(u)]\big| = |\partial_{u_1}\varphi \times \partial_{u_2}\varphi|$$

per come è stato definito $\nu'(u)$.
Inoltre, per t sufficientemente piccoli

$$\big|\ |\partial_{u_1}\varphi \times \partial_{u_2}\varphi| + at + bt^2\big| = |\partial_{u_1}\varphi \times \partial_{u_2}\varphi| + at + bt^2.$$

Risulta:

$$\int_{S_\varepsilon} dx = \varepsilon \int_D |\partial_{u_1}\varphi \times \partial_{u_2}\varphi| + \varepsilon^2 \int_D a + \varepsilon^3 \int_D b$$

Dunque

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{Vol}(S_\varepsilon) = \int_D |\partial_{u_1}\varphi \times \partial_{u_2}\varphi| = \mathrm{Area}(S)$$