

AM4 Analisi Matematica (4^o Modulo)

A.A. 2005/2006

Prof. L. Chierchia

Teoria dell'integrazione e analisi di Fourier

1. Teoria dell'integrazione secondo Lebesgue

Insiemi di misura nulla: caratterizzazioni di insiemi di misura nulla; un'unione numerabile di insiemi di misura nulla è di misura nulla; l'immagine di un insieme di misura nulla mediante una applicazione Lipschitziana è di misura nulla.

L'insieme ternario di Cantor: costruzione geometrica e proprietà generali.

Integrale di Riemann: partizioni; funzioni a scalini e loro integrale; integrale di Riemann; oscillazione di una funzione; Teorema di Vitali-Lebesgue. Una successione di funzioni a scalini che converge puntualmente ed in media integrale ad una funzione limitata non integrabile secondo Riemann.

Due lemmi fondamentali: (A) una successione non decrescente di funzioni a scalini con integrali uniformemente limitati converge quasi ovunque;

(B) una successione non crescente di funzioni a scalini converge a zero quasi ovunque se e solo se l'estremo inferiore del valore degli integrali è zero.

La classe funzionale \mathcal{F} . Integrale di funzioni in \mathcal{F} . Le funzioni integrabili secondo Riemann coincidono (q.o.) con le funzioni f tali che f e $-f$ appartengono a \mathcal{F} .

Integrale di Lebesgue: Proprietà generali della classe delle funzioni integrabili secondo Lebesgue. Il teorema di convergenza monotona di Beppo Levi. Teorema di convergenza dominata. Teorema di completezza di L^1 di Riesz e Fischer. I limiti quasi ovunque di funzioni integrabili (secondo Lebesgue) dominati da una funzione integrabile sono integrabili.

Funzioni ed insiemi misurabili: proprietà elementari. La sigma algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue: proprietà fondamentali. Sigma algebre e misure sigma additive; misure complete; misure assolutamente continue. L'esempio di Vitali di insieme non misurabile secondo Lebesgue.

Integrazione su spazi prodotto. Se Q è di misura nulla in R^n allora $Q \times A$ è di misura nulla in $R^n \times R^m$ per ogni sottoinsieme A di R^m . Le sezioni di insiemi di misura nulla sono quasi ovunque di misura nulla. Teorema di Fubini. Teorema di Tonelli. Misurabilità di epigràfi. Integrazione su insiemi misurabili. Insiemi normali misurabili. Integrazione su insiemi normali.

Approssimazione mediante funzioni regolari: le funzioni C^∞ a supporto compatto sono

dense (in norma integrale) in \mathcal{L}^1 .

Cambio di variabili. La misura di un parallelepipedo generato da n vettori è pari al determinante della matrice che ha per colonne tali vettori. La misura dell'immagine di un cubo secondo un diffeomorfismo C^1 è pari all'integrale del modulo del determinante dello Jacobiano. Teorema del cambio di variabili per funzioni \mathcal{L}^1 .

2. Integrazione su varietà

Domini, inclusioni differenziabili ed elementi di k varietà in R^n . Cambi di coordinate. Misura di un elemento di varietà. La lunghezza di un elemento di curva è l'estremo superiore delle lunghezze delle poligonali iscritte. Rette e vettori tangenti; spazio tangente. L'area di un elemento di superficie è il limite per ε che tende a 0 del volume di un intorno cilindrico di "altezza" ε diviso per ε . Inclusioni generalizzate; varietà regolari a tratti; varietà. Integrazione su varietà regolari a tratti.

Insiemi aperti regolari e regolari a tratti. Teorema della divergenza per insiemi regolari a tratti in R^n (enunciato).

Integrazioni di 1-forme; teorema di Green. Formule per il calcolo d aree mediante integrali di 1-forme. Rotore; relazioni tra divergenza, gradienti e rotori. Il teorema di Stokes in R^3 .

Dimostrazione del teorema della divergenza per domini regolari in R^2 .

TESTI CONSIGLIATI

- [1] CHERCHIA, L., *Lezioni di Analisi Matematica 2*. Aracne, (1997).
[2] RUDIN, W., *Principi di analisi matematica*. McGraw-Hill, (1991).

BIBLIOGRAFIA SUPPLEMENTARE

- [3] GIUSTI E., *Analisi Matematica 2*. Boringhieri, (1992).
[4] DEMIDOVICH B.P., *Esercizi e problemi di Analisi Matematica*. Editori Riuniti, (1993).

MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)		<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
	orale	<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO

È prevista la possibilità di un colloquio integrativo.