

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

AM6 Principi dell'analisi funzionale

A.A. 2005/06 e 2006/07

Prof. L. Chierchia

Il problema di Dirichlet in \mathbb{R}^3 e operatori compatti

Appunti presi da
Filippo Cavallari e Livia Corsi (AA 2005/06)

Maggio 2007

Sia D un aperto, connesso e limitato di \mathbb{R}^3 , con bordo $\partial D := \overline{D} \setminus D$ regolare (ossia ∂D è una superficie regolare, orientabile e chiusa).

Problema (di Dirichlet) Data $f \in C(\partial D)$, trovare $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ tale che

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } D \\ u = f & \text{su } \partial D \end{cases} \quad (1)$$

La soluzione di (1), se esiste, è unica, come segue dal seguente

Teorema 1 (Principio del massimo). Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^n e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Allora

$$\Delta u \geq 0 \Rightarrow \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

$$\Delta u \leq 0 \Rightarrow \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$$

$$\Delta u = 0 \Rightarrow \max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Dimostrazione Cominciamo col dimostrare la prima affermazione. Osserviamo intanto che se $\Delta u > 0$ su Ω , allora u non può assumere massimo in alcun punto $\xi \in \Omega$. Infatti se $\xi \in \Omega$ fosse un punto di massimo dovrebbe valere $[\partial^2 u / \partial x_k^2](\xi) \leq 0$ per ogni k , e quindi $\Delta u \leq 0$. Nel caso in cui $\Delta u \geq 0$ su Ω , consideriamo la funzione ausiliaria $v = |x|^2$ per cui vale $\Delta v > 0$ su Ω . Allora $\forall \varepsilon > 0$ la funzione $u + \varepsilon v$ è $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e soddisfa $\Delta(u + \varepsilon v) > 0$; quindi

$$\max_{\overline{\Omega}}(u + \varepsilon v) = \max_{\partial\Omega}(u + \varepsilon v).$$

Perciò, poiché $u + \varepsilon v \geq u + \varepsilon \min_{\overline{\Omega}} v$ allora $\max_{\overline{\Omega}}(u + \varepsilon v) \geq \max_{\overline{\Omega}} u + \varepsilon \min_{\overline{\Omega}} v$ e quindi

$$\max_{\overline{\Omega}} u + \varepsilon \min_{\overline{\Omega}} v \leq \max_{\overline{\Omega}}(u + \varepsilon v) \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega} v.$$

Perciò, per $\varepsilon \rightarrow 0$ otteniamo la tesi.

La seconda affermazione si dimostra in maniera analoga notando che se consideriamo la funzione $w = -u$ allora troviamo che $\Delta w = -\Delta u \geq 0$. Applicando quanto abbiamo appena dimostrato a w troviamo

$$\max_{\overline{\Omega}} w = \max_{\partial\Omega} w$$

e, poiché $-\max w = \min u$ segue la tesi.

Infine, da $|a| = \max\{a, -a\}$ per $a \in \mathbb{R}$ segue la terza affermazione. \square

Osservazione 2. Dal principio del massimo segue immediatamente che la soluzione di (1) è unica. Infatti siano u_1, u_2 due soluzioni di (1) allora $\tilde{u} = u_1 - u_2$ risolve

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u} = 0 & \text{in } D \\ \tilde{u} = 0 & \text{su } \partial D \end{cases}$$

quindi, per il principio del massimo

$$\max_{\bar{\Omega}} |\tilde{u}| = \max_{\partial\Omega} |\tilde{u}| = 0$$

perciò $\tilde{u} \equiv 0$ e dunque $u_1 \equiv u_2$.

Definizione 3. Sia $y \in \partial D$, $\nu(y)$ la normale esterna a ∂D in y e $x \in \mathbb{R}^3$ con $x \neq y$. Definiamo

$$K(x, y) := \frac{1}{2\pi} \frac{(x - y) \cdot \nu(y)}{|x - y|^3}.$$

Lemma 4.

$$\Delta_x K(x, y) = 0 \quad \forall x \neq y$$

Dimostrazione Posto $g(x) = \frac{x \cdot n}{|x|^3}$, $n \in \mathbb{R}^3$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x_j} &= \frac{n_j}{|x|^3} - 3(x \cdot n) \frac{x_j}{|x|^5} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2} &= -\frac{6n_j x_j}{|x|^5} - 3 \frac{(x \cdot n)}{|x|^5} + 15(x \cdot n) \frac{x_j^2}{|x|^7} \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2} = -6 \frac{(x \cdot n)}{|x|^5} - 9 \frac{(x \cdot n)}{|x|^5} + 15 \frac{(x \cdot n)}{|x|^5} = 0.$$

□

Osservazione 5. Sia $\varphi \in C(\partial D)$ e sia

$$u(x) := \int_{\partial D} K(x, y) \varphi(y) d\sigma(y). \quad (2)$$

Allora

- (i) $u \in C^2(\Omega)$
 - (ii) $\Delta u = 0$ in Ω
- dove $\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \partial D$

Infatti sia $x_0 \in \Omega$, allora $\exists \rho > 0$ tale che $B_{2\rho}(x_0) \subset \Omega$ e quindi

$$\frac{\partial^p}{\partial x_j^p} u(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial^p}{\partial x_j^p} K(x, y) \varphi(y) d\sigma(y) \quad \forall x \in B_\rho(x_0)$$

perciò $\Delta_x u = 0$.

Teorema 6. Sia

$$T : \varphi \in C(\partial D) \longmapsto T\varphi = \int_{\partial D} K(\cdot, y) \varphi(y) d\sigma(y). \quad (3)$$

Allora $\forall x_0 \in \partial D, \forall \varphi \in C(\partial D)$ valgono le seguenti affermazioni:

(i) L'applicazione $y \mapsto K(x_0, y)\varphi(y)$ è $L^1(\partial D)$.

(ii) Sia X lo spazio di Banach $C(\partial D)$ dotato della norma del massimo $\|\varphi\|_\infty = \max_{\partial D} |\varphi|$.

L'operatore $T : X \rightarrow X$ è compatto.

(iii) Se u è come in (2) allora

$$\lim_{\substack{x \in D \\ x \rightarrow x_0}} u(x) = -\varphi(x_0) + (T\varphi)(x_0)$$

$$\lim_{\substack{x \in D^c \\ x \rightarrow x_0}} u(x) = \varphi(x_0) + (T\varphi)(x_0).$$

Per la dimostrazione di questo teorema, avremo bisogno prima di alcuni risultati preliminari.

Lemma 7. Sia Σ una superficie regolare compatta in \mathbb{R}^3 .

(i) $\forall z \in \mathbb{R}^3, \forall A \in SO_3(\mathbb{R})$ sia $\Psi(x) = Ax + z$, allora $\Psi(\Sigma)$ è una superficie regolare in \mathbb{R}^3 e

$$\int_{\Sigma} f d\sigma_{\Sigma} = \int_{\Psi(\Sigma)} f \circ \Psi^{-1} d\sigma_{\Psi(\Sigma)}$$

(ii) $\exists c > 0$ tale che $\forall x_0 \in \Sigma, \forall \delta > 0$

$$\int_{\{\Sigma \cap B_{\delta}(x_0)\}} \frac{d\sigma(y)}{|y - x_0|} \leq c \delta.$$

Dimostrazione (i) Supponiamo intanto $\Sigma = \Phi(U)$, con $U \subset \mathbb{R}^2$ misurabile secondo Peano-Jordan e Φ un'inclusione differenziabile¹. Allora $(\Psi \circ \Phi)(U) = \Psi(\Sigma)$. Quindi

$$\int_{\Sigma} f d\sigma_{\Sigma} = \int_U f \circ \Phi |\Phi_{u_1} \wedge \Phi_{u_2}| du$$

e d'altra parte

$$\int_{\Psi(\Sigma)} f \circ \Psi^{-1} d\sigma_{\Psi(\Sigma)} = \int_U f \circ \Phi |A\Phi_{u_1} \wedge A\Phi_{u_2}| du = \int_U f \circ \Phi |\Phi_{u_1} \wedge \Phi_{u_2}| du.$$

In generale, poiché Σ è compatta, possiamo ricoprirlo con un numero finito di domini d'intersezione, D_1, \dots, D_n tali che

- $\text{meas}(D_i \cap D_j) = 0$ se $i \neq j$;
- $\forall D_i \exists U_i \subset \mathbb{R}^2$ e $\Phi_i \in C^1(U_i, \mathbb{R}^3)$ tale che $\Phi_i(U_i) = D_i$.

A questo punto, per linearità dell'integrale, avremo

$$\int_{\Sigma} f d\sigma_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \int_{D_i} f d\sigma_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \int_{U_i} f \circ \Phi_i |(\Phi_i)_{u_1} \wedge (\Phi_i)_{u_2}| du$$

¹Cioè $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$, iniettiva e $|\Phi_{u_1} \wedge \Phi_{u_2}| \neq 0$ su $\overset{\circ}{U}$

Ripetendo quindi il ragionamento di prima, segue (i).

(ii) L'affermazione segue facilmente dal fatto che si può scegliere l'atlante (U_i, Φ_i) in modo tale che esistono c_1, c_2 e δ_0 tali che

$$c_1 |u - v| \leq |\Phi_i(u) - \Phi_i(v)| \leq c_2 |u - v|, \quad \forall u, v \in U_i, |u - v| \leq \delta_0.$$

□

Lemma 8. *Siano $x, x_0 \in \partial D$. Allora*

$$(x - x_0) \cdot \nu(x_0) = O(|x - x_0|^2).$$

Più precisamente, $\exists M$ tale che $\forall x, x_0 \in \partial D$ si ha che

$$|\nu(x_0) \cdot (x_0 - x)| \leq M|x_0 - x|^2. \quad (4)$$

Dimostrazione Sappiamo che $\forall \bar{x} \in \partial D$ esistono $r > 0$, $B_{2r}(\bar{x})$ e $\psi \in C^2(\bar{U}, B_{2r}(\bar{x}) \cap \partial D)$ con $U \subset \mathbb{R}^2$ un aperto, tali che $|\psi_{u_1} \times \psi_{u_2}| \neq 0 \forall u \in \bar{U}$ e $\partial D \cap B_{2r}(\bar{x}) = \psi(\bar{U})$. Notiamo inoltre che $\partial D \subset \bigcup_{\bar{x} \in \partial D} B_r(\bar{x})$, pertanto, poiché ∂D è compatto, esistono $\bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(N)} \in \partial D$, $r_i > 0$ per $i = 1, \dots, N$ e $\psi^i \in C^2(\bar{U}^{(i)}, B_{r_i}(\bar{x}^{(i)}))$ con $U^{(1)}, \dots, U^{(N)} \subset \mathbb{R}^2$ come

sopra, e inoltre $\partial D \subset \bigcup_{i=1}^N B_{r_i}(\bar{x}^{(i)})$. Ora $\forall x_0 \in \partial D \exists j$ tale che $x_0 \in B_{r_j}(\bar{x}^{(j)}) \cap \partial D$. Definito $r = \min_{1 \leq i \leq N} r_i$, distinguiamo due casi:

caso 1 $|x - x_0| \geq r$. In questo caso si ha $|\nu(x_0) \cdot (x - x_0)| \leq |x - x_0| \leq M_1|x - x_0|$ dove $M_1 := \frac{1}{r}$.

caso 2 $|x - x_0| < r$. Certamente $x \in B_{2r_j}(\bar{x}^{(j)})$ infatti $|x - \bar{x}^{(j)}| \leq |x - x_0| + |\bar{x}^{(j)} - x_0| \leq r + r_j \leq 2r_j$. Siano quindi $u, u_0 \in U^{(j)}$ tali che $x = \psi^j(u)$ e $x_0 = \psi^j(u_0)$. Se consideriamo lo sviluppo di Taylor di ψ^j intorno a u_0

$$\begin{aligned} \psi^j(u) - \psi^j(u_0) &= \psi^j_u(u_0) \cdot (u - u_0) + R_2(u, u_0) \\ &= \psi^j_u(u_0) \cdot (u - u_0) + \int_0^1 (1-t) \partial_u^2 \psi^j((1-t)u_0 + tu)(u - u_0)^2 dt \end{aligned}$$

vediamo che possiamo stimare il resto integrale $R_2(u, u_0)$ con

$$|R_2(u, u_0)| \leq \sup_{U^{(j)}} \|\partial_u^2 \psi^j\| |u - u_0|^2 =: c|u - u_0|^2$$

dove $\|\cdot\|$ denota, qui, la norma operatoriale dello hessiano di ψ^j . Pertanto

$$\begin{aligned} |\nu(x_0) \cdot (x - x_0)| &= \left| \frac{\psi^j_{u_1} \times \psi^j_{u_2}}{|\psi^j_{u_1} \times \psi^j_{u_2}|}(u_0) \cdot (\psi^j(u) - \psi^j(u_0)) \right| \\ &\leq \frac{1}{|\psi^j_{u_1} \times \psi^j_{u_2}|} |(\psi^j_{u_1} \times \psi^j_{u_2})(u_0) \cdot \psi^j_u(u_0)(u - u_0)| + \frac{|R_2(u, u_0)|}{|\psi^j_{u_1} \times \psi^j_{u_2}|} \\ &= \frac{|R_2(u, u_0)|}{|\psi^j_{u_1} \times \psi^j_{u_2}|} \\ &\leq M_2|u - u_0|^2 \end{aligned}$$

perché $\frac{1}{|\psi_{u_1}^j \times \psi_{u_2}^j|}$ è limitato, ossia $\exists a$ tale che $\frac{1}{|\psi_{u_1}^j \times \psi_{u_2}^j|} \leq a \forall j, \forall u \in U^{(j)}$. A questo punto innanzitutto notiamo che

$$\begin{aligned} |x - x_0 - R_2(u, u_0)|^2 &= |\psi^j(u) - \psi^j(u_0)|^2 \\ &= |\psi_u(u - u_0)|^2 \\ &= ((\psi_u^j)^T \psi_u^j (u - u_0) \cdot (u - u_0)) \\ &\geq \lambda |u - u_0|^2 \end{aligned}$$

dove λ è il minimo degli autovalori di $(\psi_u^j)^T \psi_u^j$. Allora da $|x - x_0| + |R_2(u, u_0)| \geq |x - x_0 - R_2(u, u_0)| \geq \lambda |u - u_0|$ segue

$$\begin{aligned} |x - x_0| &\geq \lambda |u - u_0| - |R_2(u, u_0)| \\ &\geq \lambda |u - u_0| - c |u - u_0|^2 \\ &\geq |u - u_0| (\lambda - c |u - u_0|) \\ &\geq \frac{\lambda}{2} |u - u_0|. \end{aligned}$$

quindi

$$|\nu(x_0) \cdot (x - x_0)| \leq c^2 |x - x_0|^2$$

□

Lemma 9. Sia $k \in C(\partial D \times \partial D, \mathbb{R})$. Allora l'operatore

$$S : f \in C(\partial D) \mapsto Sf = \int_{\partial D} k(\cdot, y) f(y) d\sigma(y)$$

manda X in se stesso ed è un operatore lineare compatto.

Dimostrazione Sia $\{f_n\} \subset C(\partial D)$ con $\|f_n\| \leq M$. Allora $\|Sf_n\|_\infty \leq M \|k\|_\infty \text{mis}(\partial D)$ perciò $\{Sf_n\}$ è equilimitata. Ora $\forall \varepsilon > 0$ sia δ :

$$|k(x, y) - k(x', y)| < \frac{\varepsilon}{M \text{mis}(\partial D)} \quad \forall |x - x'| < \delta, x, x', y \in \partial D$$

Allora, $\forall x_0 \in \partial D$ avremo

$$|Sf_n(x) - Sf_n(x_0)| \leq M \int_{\partial D} |k(x, y) - k(x_0, y)| d\sigma(y) < \varepsilon$$

e quindi $\{Sf_n\}$ è equicontinua. Dal teorema di Ascoli-Arzelà segue che esiste una sottosuccessione n_k tale che Sf_{n_k} converge uniformemente. □

Lemma 10. Sia $x_0 \in \partial D$ e sia $\delta > 0$. Posto $B = B_\delta(x_0) \cap \partial D$, allora

$$\lim_{t \rightarrow 0^\pm} t \int_B \frac{d\sigma(y)}{|x_0 + t\nu(x_0) - y|^3} = \pm 2\pi.$$

Inoltre tale limite è uniforme in x_0 , ossia $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists T$ tale che

$$\left| t \int_B \frac{d\sigma(y)}{|x_0 + t\nu(x_0) - y|^3} \mp 2\pi \right| < \varepsilon$$

$\forall 0 < \pm t < T, \forall x_0 \in \partial D$

Dimostrazione Assumiamo $|t| < \frac{\delta}{2}$ e cominciamo con l'osservare che

$$\int_{\{|y-x_0| \geq \delta\}} \frac{d\sigma}{|x_0 + t\nu(x_0) - y|^3} \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^3 \text{mis}(\partial D). \quad (5)$$

Ora osserviamo che se $0 < \delta_2 < \delta_1$ avremo che, detti $B_1 = B_{\delta_1}(x_0) \cap \partial D$ e $B_2 = B_{\delta_2}(x_0) \cap \partial D$, da

$$\int_{B_1 \setminus B_2} \frac{d\sigma}{|x_0 + t\nu(x_0) - y|^3} \leq \left(\frac{2}{\delta_2}\right)^3 \text{mis}(\partial D).$$

segue che

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \int_{B_1} \frac{d\sigma}{|x_0 + t\nu(x_0) - y|^3} = \lim_{t \rightarrow 0} t \int_{B_2} \frac{d\sigma}{|x_0 + t\nu(x_0) - y|^3}.$$

Per il lemma 7 possiamo assumere $x_0 = (0, 0, 0)$ e $\nu(x_0) = (0, 0, 1)$; esistono ϕ regolare e $\rho > 0$ tali che

$$\partial D \cap B_\rho(0) = \{y \in \mathbb{R}^3 : \phi(y) = 0, |y| < \rho\}$$

e $\{\phi < 0\} \cap B_\rho(0) = D \cap B_\rho(0)$. Da cui $\nabla \phi = (0, 0, 1)$. Possiamo assumere (eventualmente riducendo ρ) che $\phi_{y_3} > 0$ su $B_\rho(0)$. Per il teorema della funzione implicita esiste α regolare

$$\alpha : \{y_1^2 + y_2^2 < \rho^2\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che $\phi(y_1, y_2, \alpha(y_1, y_2)) = 0$. In questo caso, se $\delta < \rho$ (cosa che possiamo sempre assumere in vista dell'osservazione precedente) poiché ϕ è ben definita su B_ρ , avremo

$$\int_{\{|y-x_0| < \delta\}} \frac{d\sigma}{|x_0 + t\nu(x_0) - y|^3} = \int_{\{y_1^2 + y_2^2 < \delta^2\}} \frac{\sqrt{1 + \alpha_{y_1}^2 + \alpha_{y_2}^2}}{(y_1^2 + y_2^2 + (\alpha - t)^2)^{\frac{3}{2}}} dy_1 dy_2 =: I.$$

Fissiamo $0 < \eta < 1$, $\exists \delta_1(\eta)$ tale che $\forall \delta < \delta_1(\eta)$

$$\theta_- := 1 - \eta < \sqrt{1 + \alpha_{y_1}^2 + \alpha_{y_2}^2} < 1 + \eta =: \theta_+$$

Inoltre $\exists \delta_2(\eta) < \delta_1$ tale che $|\alpha| \leq M|y_1^2 + y_2^2|$ e la costante positiva M può essere presa indipendente da x_0 (compattezza di \overline{D}). Quindi se $|t| < T_1(\eta) := \frac{\eta}{4M}$ e $\delta < \min\{\delta_2(\eta), \frac{\eta}{2M^2}\}$ (cosicché $2M|t| + M^2\delta^2 < \eta$) avremo

$$\begin{aligned} |y_1^2 + y_2^2 + t^2 - 2\alpha t + \alpha^2| &\geq y_1^2 + y_2^2 + t^2 - 2|\alpha||t| - |\alpha|^2 \\ &\geq y_1^2 + y_2^2 + t^2 - 2M(y_1^2 + y_2^2)|t| - M^2(y_1^2 + y_2^2)\delta^2 \\ &\geq (1 - 2M|t| - M\delta^2)(y_1^2 + y_2^2) + t^2 \\ &\geq (1 - \eta)(y_1^2 + y_2^2) + t^2 \\ &= \theta_-(y_1^2 + y_2^2) + t^2. \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} |y_1^2 + y_2^2 + t^2 - 2t\alpha + \alpha^2| &\leq y_1^2 + y_2^2 + t^2 + 2|t||\alpha| + \alpha^2 \\ &\leq y_1^2 + y_2^2 + t^2 + 2M|t|(y_1^2 + y_2^2) + M^2\delta^2(y_1^2 + y_2^2) \\ &= (1 + 2M|t| + M^2\delta^2)(y_1^2 + y_2^2) + t^2 \\ &\leq (1 + \eta)(y_1^2 + y_2^2) + t^2 \\ &= \theta_+(y_1^2 + y_2^2) + t^2. \end{aligned}$$

Pertanto,

$$\frac{1}{(\theta_+(y_1^2 + y_2^2) + t^2)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{(y_1^2 + y_2^2 + (\alpha - t)^2)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{(\theta_-(y_1^2 + y_2^2) + t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e, passando agli integrali,

$$\theta_- \int_B \frac{dy_1 dy_2}{(\theta_+(y_1^2 + y_2^2) + t^2)^{\frac{3}{2}}} \leq I \leq \theta_+ \int_B \frac{dy_1 dy_2}{(\theta_-(y_1^2 + y_2^2) + t^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (6)$$

Ora, $\forall \theta > 0$ vediamo che

$$\begin{aligned} \int_{\{|y| < \delta\}} \frac{dy_1 dy_2}{(\theta(y_1^2 + y_2^2) + t^2)^{\frac{3}{2}}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\delta \frac{r dr d\varphi}{(\theta r^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\pi}{\theta} \int_0^{\theta \delta^2} \frac{ds}{(s + t^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\pi}{\theta} \int_{t^2}^{\theta \delta^2 + t^2} \frac{ds}{s^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\pi}{\theta} \left[\frac{2}{\sqrt{s}} \right]_{\theta \delta^2 + t^2}^{t^2} \\ &= \frac{2\pi}{\theta} \left(\frac{1}{|t|} - \frac{1}{\sqrt{\theta \delta^2 + t^2}} \right) \end{aligned}$$

dove nella prima uguaglianza abbiamo applicato il teorema del cambio di variabili operando un passaggio a coordinate polari, nella seconda, sempre per il teorema del cambio di variabili, abbiamo considerato il riscaldamento $s = \theta r^2$ e nella terza, con abuso di notazione, abbiamo considerato una traslazione di t^2 dato che l'integrale è invariante per traslazioni. A questo punto, $\forall \eta > 0$, se $\delta < \delta_2(\eta)$ e $|t| < T_1$ abbiamo che vale la (6) e

$$\frac{\theta_-}{\theta_+} 2\pi \leq \lim_{t \rightarrow 0} |t|I \leq \frac{\theta_+}{\theta_-} 2\pi$$

perciò, per $\eta \rightarrow 0$ avremo

$$\lim_{t \rightarrow 0} |t|I = 2\pi.$$

da cui

$$\lim_{t \rightarrow 0^\pm} tI = \pm \lim_{t \rightarrow 0} |t|I = \pm 2\pi.$$

□

Lemma 11. *Sia $\varphi \in C(\partial D)$ e u come in (2). Allora $\forall x_0 \in \partial D$*

$$u(x_0 \pm) := \lim_{t \rightarrow 0^\pm} u(x_0 + t\nu(x_0)) = \pm \varphi(x_0) + (T\varphi)(x_0)$$

Inoltre tale limite è uniforme in x_0 , ossia $\forall \varepsilon > 0 \exists T$ tale che

$$|u(x_0 + t\nu(x_0)) \mp \varphi(x_0) - (T\varphi)(x_0)| < \varepsilon \quad (7)$$

$\forall 0 < \pm t < T, x_0 \in \partial D.$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
u(x_0 + t\nu(x_0)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{(x_0 + t\nu(x_0) - y) \cdot \nu(y)}{|x_0 + t\nu(x_0) - y|^3} \varphi(y) d\sigma(y) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{(x_0 - y) \cdot \nu(y)}{|x_0 + t\nu(x_0) - y|^3} \varphi(y) d\sigma(y) + \\
&\quad + \frac{t}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{\nu(x_0) \cdot \nu(y)}{|x_0 + t\nu(x_0) - y|^3} \varphi(y) d\sigma(y) \\
&=: I_1 + I_2
\end{aligned}$$

Consideriamo prima I_1 e sia M come in (4). Allora $\forall |t| \leq 1/(4M)$ si ha

$$\begin{aligned}
|x_0 + t\nu(x_0) - y|^2 &= |x_0 - y|^2 + t^2 + 2t\nu(x_0) \cdot (y - x_0) \\
&\geq |x_0 - y|^2(1 - 2|t|M) \\
&\geq \frac{1}{2}|x_0 - y|^2.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\left| \frac{(x_0 - y) \cdot \nu(y)}{(x_0 + t\nu(x_0) - y)^3} \varphi(y) \right| \leq \sqrt{2} \|\varphi\|_\infty \frac{|(x_0 - y) \cdot \nu(y)|}{|x_0 - y|^3} \quad (8)$$

che per il lemma (8) è una funzione $L^1(\partial D)$. Quindi dal teorema di convergenza dominata di Lebesgue, segue che

$$\lim_{t \rightarrow 0} I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{(x_0 - y) \cdot \nu(y)}{|x_0 - y|^3} \varphi(y) d\sigma(y) = (T\varphi)(x_0)$$

uniformemente in x_0 . Passiamo ad analizzare I_2 . Fissiamo ora $0 < \varepsilon < 1$. Per l'uniforme continuità delle funzioni $|\nu(x_0) \cdot \nu(y) - 1|$ e $\varphi(y)$ su ∂D , segue che $\exists \delta > 0$ tale che $\forall |x_0 - y| < \delta$ si ha $|\nu(x_0) \cdot \nu(y) - 1| < \varepsilon$ e $|\varphi(y) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$. Scriviamo

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{t}{2\pi} \int_{\{|y-x_0| \geq \delta\}} \frac{\nu(x_0) \cdot \nu(y)}{|x_0 + t\nu(x_0) - y|^3} \varphi(y) d\sigma(y) + \\
&\quad + \frac{t}{2\pi} \int_{\{|y-x_0| < \delta\}} \frac{\nu(x_0) \cdot \nu(y)}{|x_0 + t\nu(x_0) - y|^3} \varphi(y) d\sigma(y)
\end{aligned}$$

Dalla (5) segue che se $|t| < \min \left\{ \frac{\delta}{2}, \left(\frac{\delta}{2} \right)^3 \frac{2\pi}{\|\varphi\|_\infty \text{mis}(\partial D)} \varepsilon \right\}$ allora

$$\left| \frac{t}{2\pi} \int_{\{|y-x_0| \geq \delta\}} \frac{\nu(x_0) \cdot \nu(y)}{|x_0 + t\nu(x_0) - y|^3} \varphi(y) d\sigma(y) \right| \leq \left(\frac{2}{\delta} \right)^3 \frac{|t|}{2\pi} \|\varphi\|_\infty \text{mis}(\partial D) < \varepsilon.$$

Per il lemma 10 $\exists T$, indipendente da x_0 tale che $\forall |t| < T$ si ha

$$\left| \frac{t}{2\pi} \int_{\{|y-x_0|<\delta\}} \frac{d\sigma}{|x_0 + t\nu(x_0) - y|^3} \mp 1 \right| < \varepsilon$$

$$\frac{|t|}{2\pi} \int_{\{|y-x_0|<\delta\}} \frac{d\sigma}{|x_0 + t\nu(x_0) - y|^3} \leq 2.$$

Quindi se $|t| < T$, per la scelta di δ si ha che

$$\left| \frac{t}{2\pi} \int_{\{|y-x_0|<\delta\}} \frac{\nu(x_0) \cdot \nu(y)}{|x_0 + t\nu(x_0) - y|^3} \varphi(y) d\sigma(y) \mp \varphi(x_0) \right| \leq$$

$$\leq \frac{|t|}{2\pi} \int_{\{|y-x_0|<\delta\}} \frac{|\nu(x_0) \cdot \nu(y) - 1|}{|x_0 + t\nu(x_0) - y|^3} \|\varphi\|_\infty d\sigma + \frac{|t|}{2\pi} \int_{\{|y-x_0|<\delta\}} \frac{|\varphi(y) - \varphi(x_0)|}{|x_0 + t\nu(x_0) - y|^3} d\sigma$$

$$+ \left| \varphi(x_0) \frac{t}{2\pi} \int_{\{|y-x_0|<\delta\}} \frac{d\sigma}{|x_0 + t\nu(x_0) - y|^3} \mp \varphi(x_0) \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon \frac{|t|}{2\pi} \int_{\{|y-x_0|<\delta\}} \frac{\|\varphi\|_\infty}{|x_0 + t\nu(x_0) - y|^3} d\sigma + \varepsilon \frac{|t|}{2\pi} \int_{\{|y-x_0|<\delta\}} \frac{1}{|x_0 + t\nu(x_0) - y|^3} d\sigma$$

$$+ \left| \varphi(x_0) \frac{t}{2\pi} \int_{\{|y-x_0|<\delta\}} \frac{1}{|x_0 + t\nu(x_0) - y|^3} d\sigma \mp \varphi(x_0) \right| \leq$$

$$\leq 2\varepsilon \|\varphi\|_\infty + 2\varepsilon + \varepsilon \|\varphi\|_\infty = (3\|\varphi\|_\infty + 2)\varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di ε segue la tesi. □

A questo punto possiamo dimostrare il teorema 6.

Dimostrazione (del teorema 6)

(i) Sia $x_0 \neq y \in \partial D$. Allora, per il lemma 8, si ha che

$$|K(x_0, y)| = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{(x_0 - y) \cdot \nu(y)}{|x_0 - y|^3} \right| \leq \frac{M}{2\pi} \frac{1}{|x_0 - y|}$$

che è integrabile su ∂D (cfr. punto (ii) del lemma 7); pertanto l'applicazione $y \mapsto K(x_0, y)\varphi(y) \in L^1(\partial D)$.

(ii) Per quanto appena dimostrato, $(T\varphi)(x_0)$ è ben definita. Mostriamo che T è un operatore compatto. Sia $h > 0$ e sia

$$T_h\varphi(x) = \int_{\partial D} K_h(x, y)\varphi(y)d\sigma(y) \quad \text{con} \quad K_h(x, y) := \frac{1}{2\pi} \frac{(x-y) \cdot \nu(y)}{|x-y|^3 + h}$$

Per il lemma 9 sappiamo che T_h è un operatore compatto; mostriamo quindi che T_h converge in norma a T .

Sia $\varepsilon > 0$; dal lemma 8 e dal punto (ii) del lemma 7 segue che possiamo scegliere δ tale che

$$\frac{1}{\pi} \int_{\partial D \cap \{|x_0 - y| < \delta\}} \frac{|(x_0 - y) \cdot \nu(y)|}{|x_0 - y|^3} d\sigma(y) < \varepsilon. \quad (9)$$

Sia, ora, $\varphi \in C(\partial D)$ con $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ e $x_0 \in \partial D$. Allora

$$\begin{aligned} |((T_h - T)\varphi)(x_0)| &\leq \left| \int_{\partial D \cap \{|x_0 - y| < \delta\}} (K_h(x_0, y) - K(x_0, y))\varphi(y)d\sigma(y) \right| + \\ &\quad + \left| \int_{\partial D \cap \{|x_0 - y| \geq \delta\}} (K_h(x_0, y) - K(x_0, y))\varphi(y)d\sigma(y) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{\partial D \cap \{|x_0 - y| < \delta\}} \frac{|(x_0 - y) \cdot \nu(y)|}{|x_0 - y|^3} d\sigma(y) + \\ &\quad + \int_{\partial D \cap \{|x_0 - y| \geq \delta\}} |K_h(x_0, y) - K(x_0, y)| d\sigma(y) \\ &\leq \varepsilon + \frac{|h|}{2\pi} \int_{\partial D \cap \{|x_0 - y| \geq \delta\}} \frac{d\sigma(y)}{(|x_0 - y|^3 + h)|x_0 - y|^2} \\ &\leq \varepsilon + \frac{|h|}{2\pi} \frac{\text{mis}(\partial D)}{\delta^5}. \end{aligned}$$

Dunque, $\lim_{h \rightarrow 0} |((T_h - T)\varphi)(x_0)| < \varepsilon$, da cui segue (ii).

(iii) Sia $\varepsilon > 0$ e sia δ tale che $|T\varphi(x) - T\varphi(\bar{x})| < \varepsilon$, $|\varphi(x) - \varphi(\bar{x})| < \varepsilon$ se $x, \bar{x} \in \partial D$ con $|x - \bar{x}| < \delta$. Inoltre possiamo scegliere δ in modo tale che $\forall x_0 \in \partial D$, $\forall x \in B_\delta(x_0)$ esistono unici $\bar{x} \in \partial D \cap B_\delta(x_0)$ e $|t| < \delta$ tali che $x = \bar{x} + t\nu(\bar{x})$. Questo è vero perché $\exists \varepsilon_0 > 0$ tale che l'applicazione

$$\psi : (\bar{x}, t) \in \partial D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \longmapsto \bar{x} + t\nu(\bar{x})$$

è un diffeomorfismo da $\partial D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ su $\psi(\partial D, (-\varepsilon_0, \varepsilon_0))$. Chiaramente $t > 0$ se $x \in \overline{D}^c$ mentre $t < 0$ se $x \in D$. Sia ora $0 < T < \delta$ tale che valga (7). Fissiamo $x_0 \in \partial D$, $x \in B_\delta(x_0) \cap \partial D$ e sia $\bar{x} \in \partial D \cap B_\delta(x_0)$ tale che $x = \bar{x} + t\nu(\bar{x})$. Allora

$$\begin{aligned} |u(x) \pm \varphi(x_0) - T\varphi(x_0)| &\leq |u(x) \pm \varphi(\bar{x}) - T\varphi(\bar{x})| + \\ &\quad |\varphi(x_0) - \varphi(\bar{x})| + |T\varphi(x_0) - T\varphi(\bar{x})| < 3\varepsilon \end{aligned}$$

□

Osservazione 12. Data $\varphi \in C(\partial D)$, sia u come in (2). Se estendiamo u su ∂D ponendo $u(x_0) := -\varphi(x_0) + (T\varphi)(x_0)$ per $x_0 \in \partial D$, allora $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{D})$ quindi il problema (1) si può ricondurre ad un'equazione del tipo

$$(\mathbf{1} - T)(\varphi) = -f \quad (10)$$

su X , con incognita $\varphi \in C(\partial D)$.

Lemma 13. $N(\mathbf{1} - T) = \{0\}$ (dove $N(S) := \{\varphi \in X : S\varphi = 0\}$).

Dimostrazione Supponiamo per assurdo che $\exists 0 \neq \psi \in N(\mathbf{1} - T)$ i.e. $\psi = T\psi$. Sia

$$v(x) := \int_{\partial D} K(x, y)\psi(y)d\sigma(y)$$

Per il punto (iii) del teorema (6), se $x_0 \in D$ allora

$$\lim_{\substack{x \in D \\ x \rightarrow x_0}} v(x) = -\psi(x_0) + (T\psi)(x_0) = 0$$

Per quanto osservato precedentemente, v è armonica in D e $v = 0$ su ∂D da cui $v \equiv 0$ in D per il principio del massimo.

Osserviamo, ora, che se $x_0 \in \partial D$ e se

$$\partial_\nu v(x_0 \pm) = \lim_{t > 0, t \rightarrow 0} \frac{v(x_0 \pm t\nu(x_0)) - v(x_0 \pm)}{\pm t}.$$

Allora $\partial_\nu v(x_0+) = \partial_\nu v(x_0-)$. Dunque $\partial_\nu v = 0$ su ∂D e dal teorema di Stokes (e dal decadimento di K all'infinito) segue che $v \equiv 0$ in \bar{D}^c . Ma allora, per il punto (iii) del teorema (6),

$$0 = \lim_{\substack{x \in \bar{D}^c \\ x \rightarrow x_0}} v(x) = \psi(x_0) + (T\psi)(x_0)$$

e quindi $2\psi(x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in \partial D$ cioè $\psi \equiv 0$. □

Osservazione 14. Dal teorema dell'alternativa di Fredholm, segue che

$$R(\mathbf{1} - T) := (\mathbf{1} - T)(C(\partial D)) = C(\partial D)$$

quindi se u è come in (2) con φ come in (10), allora tale u è l'unica (per il principio del massimo) soluzione del problema (1).

Abbiamo quindi dimostrato il seguente

Teorema 15. Sia $D \subset \mathbb{R}^3$ un aperto connesso limitato con bordo ∂D regolare. Data $f \in C(\partial D) \exists! u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \partial D)$ tale che valga (1). Inoltre l'operatore T definito in (3) è un operatore compatto da $X = (C(\partial D), \|\cdot\|_\infty)$ in se stesso e la soluzione u è data dalla formula (2) con φ unica soluzione di (10).

Esercizio Generalizzare il Teorema 15 a $D \subset \mathbb{R}^n \quad \forall n \geq 2$.

Suggerimento. Si definisca

$$K(x, y) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} (x - y) \cdot \nu(y) \ln |x - y| & \text{se } n = 2 \\ \frac{2}{n \text{Vol}(B(0, 1))} \frac{(x - y) \cdot \nu(y)}{|x - y|^n} & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$