

Esercizi. Assegnazione 2 (12/3/07)

Es 5 Dimostrare le proprietà (a)÷(d) delle funzioni convesse enunciate nel Paragrafo I.3 di H. Brezis, Analyse fonctionnelle. Masson, (1983).

Es 6 Sia $E = \ell^p$ con $1 \leq p < \infty$. Mostrare che le funzioni $\varphi : E \rightarrow (-\infty, \infty]$ definite qui sotto sono convesse s.c.i. e determinare φ^* :

$$(a) \varphi(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} k|x_k|^2 & \text{se } \sum_{k=1}^{\infty} k|x_k|^2 < \infty \\ \infty & \text{altrimenti .} \end{cases}$$

$$(b) \varphi(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| & \text{se } \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty \\ \infty & \text{altrimenti .} \end{cases}$$

Es 7 Siano E ed F due spazi di Banach e sia $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(E, F)$ una sequenza di operatori limitati. Assumiamo che per ogni $x \in E$, $T_n x$ converge ad un limite che denotiamo con Tx . Mostrare che se $x_n \rightarrow x$ in E allora $T_n x_n \rightarrow Tx$ in F .

Es 8 Sia $E = C([0, 1])$ dotato della norma del sup $\|\cdot\|_{\infty}$. Si consideri l'operatore $A : D(A) \rightarrow E$ definito da

$$D(A) = C^1([0, 1]) , \quad Au = u' = \frac{du}{dx} .$$

- (i) Verificare che $\overline{D(A)} = E$.
- (ii) A è limitato?
- (iii) A è chiuso?
- (iv) Sia $B : D(B) \rightarrow E$ definito da

$$D(B) = C^2([0, 1]) , \quad Bu = u' = \frac{df}{dx} .$$

B è chiuso? Se non è chiuso, è chiudibile (ossia ammette una estensione chiusa)? Se è chiudibile, qual è la sua chiusura (il più piccolo operatore chiuso che lo estende)?