Esercizi. Assegnazione 1

Es 1 Dimostrare che su uno spazio vettoriale finito dimensionale (cioè che ammette una base vettoriale finita) tutte le norme sono equivalenti. Dimostrare, tramite un esempio che questo non è, in generale, vero se lo spazio non è finito dimensionale.

Es 2 Sia $E = C([0,1)])$ munito della norma del massimo $\|u\| = \max_{[0,1]} |u(t)|$ e sia $E_0 := \{u \in E : u(0) = 0\}$ e sia

$$f : u \in E_0 \to f(u) = \int_0^1 u(t)dt \ .$$

(i) Dimostrare che E_0 è chiuso, che $f \in E_0'$ e calcolare $\|f\|_{E_0'}$.
(ii) E' possibile trovare $u \in E_0$ tale che $\|u\| = 1$ e $f(u) = \|f\|_{E'}$?

Es 3 (i) Calcolare la funzione di gauge p_C dell'ellisse

$$C := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 < 1 \right\} , \qquad (a \geq b > 0) \ ,$$

e dimostrare che definisce una norma su $\mathbb{R}^2$.
(ii) Trovare il più piccolo M tale che $p_c(x) \leq M|x|_2$ per ogni x ($|\cdot|_2$:= norma euclidea).

Es 4 Dimostrare le proprietà (a)$\div$(e) delle funzioni semi-continue inferiormente enunciate nel Paragrafo I.3 di H. Brezis, Analyse fonctionelle. Masson, (1983).