Esercizi. Assegnazione 2

Es 5 Dimostrare le proprietà (a)÷(d) delle funzioni convesse enunciate nel Paragrafo I.3 di H. Brezis, Analyse fonctionelle. Masson, (1983).

Es 6 Sia $E = \ell^p$ con $1 \le p < \infty$. Mostrare che le funzioni $\varphi : E \to (-\infty, \infty]$ definite qui sotto sono convesse s.c.i. e determinare φ^*:

$$\text{(a) } \varphi(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} k|x_k|^2 & \text{se } \sum_{k=1}^{\infty} k|x_k|^2 < \infty \\ \infty & \text{altrimenti .} \end{cases}$$

$$\text{(b) } \varphi(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| & \text{se } \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty \\ \infty & \text{altrimenti .} \end{cases}$$

Es 7 Siano E ed F due spazi di Banach e sia $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(E, F)$ una sequenza di operatori limitati. Assumiamo che per ogni $x \in E$, $T_n x$ converge ad un limite che denotiamo con Tx. Mostrare che se $x_n \to x$ in E allora $T_n x_n \to Tx$ in F.

Es 8 Sia $E = C([0,1])$ dotato della norma del sup $\|\cdot\|_\infty$. Si consideri l'operatore $A : D(A) \to E$ definito da

$$D(A) = C^1([0,1]) \ , \qquad Au = u' = \frac{du}{dx} \ .$$

(i) Verificare che $\overline{D(A)} = E$.

(ii) A è limitato?

(iii) A è chiuso?

(iv) Sia $B : D(B) \to E$ definito da

$$D(B) = C^2([0,1]) \ , \qquad Bu = u' = \frac{df}{dx} \ .$$

B è chiuso? Se non è chiuso, è chiudibile (ossia ammette una estensione chiusa)? Se è chiudibile, qual è la sua chiusura (il più piccolo operatore chiuso che lo estende)?