Esercizi. Assegnazione 4

Es 12 Sia $X := \Big\{ x := \{x_n\}_{n\geq 1} \text{ t.c. } \quad x_n \in \mathbb{R} \Big\}$ lo spazio vettoriale delle successioni a valori in $\mathbb{R}$ e si definiscano i seguenti sottoinsiemi di X:

$$\begin{aligned}
\ell_\infty &:= \Big\{ x \in X : \ \|x\|_\infty := \sup_n |x_n| < \infty \Big\} \\
c_0 &:= \Big\{ x \in X : \ \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Big\} \\
\ell_p &:= \Big\{ x \in X : \ \|x\|_p := \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \Big)^{1/p} < \infty \Big\} \\
\mathfrak{s} &:= \Big\{ x \in X : \ \lim_{n\to\infty} n^p x_n = 0 \ \forall \ p \geq 1 \Big\} \\
\mathbb{f} &:= \Big\{ x \in X : \ \exists n_0 \text{ t.c. } x_n = 0 \ \forall \ n \geq n_0 \Big\}
\end{aligned}$$

(i) Si dimostri che $\Big(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty\Big)$, $\Big(c_0, \|\cdot\|_\infty\Big)$, $\Big(\ell_p, \|\cdot\|_p\Big)$ sono spazi di Banach. Si dimostri che $\mathfrak{s} \subset \ell_p$ per ogni $p \geq 1$.

(ii) Si dimostri che $\mathbb{f}$ è denso in ℓ_p e in c_0. Si dimostri che ℓ_p e c_0 sono separabili (ossia hanno un sottoinsieme numerabile denso).

(iii) Si dimostri che ℓ_∞ non è separabile.

(iv) Si dimostri che $\ell_1' = \ell_\infty$ (ℓ_1'= duale di ℓ_1). Si dimostri che $c_0' = \ell_1$. Si dimostri che, per $p > 1$, $\ell_p' = \ell_q$ dove $q = p/(p-1)$.

Es 13 Sia $E = \ell_1$; sia

$$D(A) := \Big\{ x = \{x_n\} \in \ell_1 : \ Ax := \{n x_n\} \in \ell_1 \Big\} .$$

(i) Verificare che $\overline{D(A)} = E$ e che A è chiuso.

(ii) Determinare $D(A^*)$, A^* e $\overline{D(A^*)}$.

Es 14 Per ogni intero $n \geq 1$ sia $e^{(n)} \in X$ la successione con componenti $e_i^{(n)} = \delta_{in}$ ovvero la successione con tutti zeri tranne un uno all'ennesima componente.

(i) Mostrare che $\lim_{n\to\infty} e^{(n)} = 0$ in ℓ^p nella topologia $\sigma(\ell_p, \ell_q)$ con $p > 1$ e $q = p/(p-1)$.

(ii) Mostrare che non esiste alcuna sottosuccessione di $e^{(n)}$ che converga in ℓ_1 nella topologia $\sigma(\ell_1, \ell_\infty)$.