Esercizi. Assegnazione 5

Es 15 Sia $1 \leq p \leq \infty$ e q il suo coniugato ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dove $\frac{1}{\infty} = 0$) e sia $\{x^{(n)}\} \subset \ell^p$.

(i) Dimostrare che se $x^{(n)} \rightharpoonup x$ nella topologia $\sigma(\ell^p, \ell^q)$ allora

$$\sup \|x^{(n)}\|_p < \infty \qquad \text{e} \qquad x_i^{(n)} \to x_i \ \ \forall\, i\ . \tag{$*$}$$

(ii) Viceversa, sia $p > 1$ e dimostrare che se vale $(*)$ allora $x = \{x_i\} \in \ell^p$ e $x^{(n)} \rightharpoonup x$. Cosa succede se $p = 1$?

Es 16 Sia E uno spazio di Banach, sia $K := B_{E'}$ munito della topologia $*$–debole $\sigma(E', E)$ (che lo rende compatto). Mostrare che l'applicazione

$$T : x \in E \to (Tx)(t) := \langle t, x \rangle\ , \quad (t \in B_{E'})$$

definisce una *isometria* da E in $C(K)$, lo spazio delle funzioni continue su K.

Mostrare che se E è separabile allora esiste una isometria da E in ℓ^∞.

Ovviamente tali mappe non sono suriettive (spiegare).

Es 17 Sia E uno spazio di Banach di dimensione infinita che verifichi una delle ipotesi seguenti:

(i) E' è separabile

(ii) E è riflessivo.

Dimostrare che esiste una successione $\{x_n\}$ tale che $\|x_n\| = 1$ per ogni n e $x_n \rightharpoonup 0$ nella topologia $\sigma(E, E')$.

[Suggerimenti: B_E è metrizzabile per $\sigma(E, E')$ e 0 appartiene alla sua chiusura. Si costruisca un sottospazio E_0 chiuso, riflessivo, separabile e di dimensione infinita di E.]