Esercizi. Assegnazione 6

Es 18 (Spazi di Hilbert complessi). Uno spazio di Hilbert complesso $\mathcal{H}$ è uno spazio vettoriale complesso dotato di un prodotto scalare complesso¹ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ che sia completo rispetto alla topologia indotta dalla norma $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

(i) Dimostrare che i seguenti spazi sono spazi di Hilbert complessi:

- ℓ^2 lo spazio delle successioni $\{c_n \in \mathbb{C} : n \in \mathbb{Z}\}$ a quadrato sommabile ($\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty$) dotato del prodotto scalare $\langle c, d \rangle := \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \bar{d}_n$;

- $L^2(\Omega)$ lo spazio delle classi di equivalenza (modulo insiemi di misura di Lebesgue nulli) di funzioni da $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, insieme misurabile secondo Lebesgue, a valori complessi ed a quadrato sommabile ($\int_{\Omega} |f|^2 dx < \infty$ dove dx denota la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$).

(ii) Analogamente al caso reale ed introducendo le corrispondenti definizioni necessarie, si dimostri che ogni spazio di Hilbert (complesso) separabile ammette una base di Hilbert numerabile.

Es 19 Sia $f \in L^1([0, 2\pi], \mathbb{C})$ e si diano le seguenti definizioni

$$\hat{f}_n := \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}, \quad \forall n \in \mathbb{Z};$$

$$S_N : f \rightarrow (S_N f)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-N}^N \hat{f}_n e^{inx}, \quad \forall N \geq 0;$$

$$C_N : f \rightarrow (C_N f)(x) := \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N (S_k f)(x), \quad \forall N \geq 0;$$

$$K_N(x) := \frac{\text{sen}^2 \frac{N+1}{2} x}{2\pi(N+1) \text{sen}^2 \frac{x}{2}}, \quad \forall N \geq 0.$$

Si dimostrino le seguenti affermazioni².

(i) $(S_N f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) \frac{\text{sen}(N + \frac{1}{2})t}{\text{sen} \frac{t}{2}} dt.$

(ii) $(C_N f)(x) = \int_0^{2\pi} f(x+t) K_N(t) dt.$

¹Ossia soddisfa

- (a) $\langle x, x \rangle > 0, \forall x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$;
- (b) $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle, \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$;
- (c) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,

²Come d'uso comune, denotiamo ancora con $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'estensione 2π -periodica di $f \in L^1([0, 2\pi], \mathbb{C})$ cioè $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tau_{2\pi n} f$ dove $(\tau_y g)(x) = g(x+y)$ è l'operatore di traslazione.

(iii) $\int_0^{2\pi} K_N(t)dt = 1$ e per ogni $0 < \delta < 2\pi$, $K_N \rightarrow 0$ uniformemente su $[\delta, 2\pi - \delta]$.

(iv) Se $f \in L^\infty([0, 2\pi])$ ed è continua in x_0 allora

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (C_N f)(x_0) = f(x_0) . \quad (\text{Cesàro})$$

(v) Se $f \in C_{\text{per}}([0, 2\pi])$ (cioè $f \in C(\mathbb{R})$ e $f(x + 2\pi) = f(x)$) allora³

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|C_N f - f\|_{C[0, 2\pi]} = 0 .$$

(vi) Se $f \in L^2([0, 2\pi])$ allora⁴

$$\|f - S_N f\|_2 \leq \|f - C_N f\|_2 .$$

(vii) Se $f \in C_{\text{per}}^1([0, 2\pi])$ (cioè $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f(x + 2\pi) = f(x)$) allora

$$\widehat{f}'_n = in\widehat{f}_n , \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^2 |\widehat{f}_n|^2 < \infty , \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_n| < \infty .$$

(viii) Se $f \in C_{\text{per}}^1([0, 2\pi])$, allora

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N f - f\|_{C[0, 2\pi]} = 0 .$$

(ix) Sia ℓ^2 lo spazio di Hilbert delle successioni $\{c_n \in \mathbb{C} : n \in \mathbb{Z}\}$ a quadrato sommabile ($\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty$) dotato del prodotto scalare $\langle c, d \rangle := \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \overline{d_n}$. Si denoti con $\mathcal{F}$ la mappa $f \in L^2([0, 2\pi]) \rightarrow \{\widehat{f}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Si dimostri che $\mathcal{F}$ è una isometria (suriettiva) di spazi di Hilbert (che conserva il prodotto scalare).

(x) Si dimostri che $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è una base di Hilbert per $L^2([0, 2\pi])$.

³ $\|\cdot\|_{C[0, 2\pi]}$ denota la norma del massimo.

⁴ $\|\cdot\|_2$ denota la norma L^2 .