AA06/07 (Analisi Uno per Fisica) Primo esonero Roma, 8 Novembre 2006.

COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 3 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

1. Determinare tutti i numeri reali per cui $|x| + x < |x - 4|$.

2. Enunciare e dimostrare il Teorema di Bolzano Weierstrass.

3. Dopo aver definito la nozione di punto di accumulazione, determinare i punti di accumulazione del seguente sottoinsieme di $\mathbf{R}$: $\{5 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{1 - \frac{5}{n^2} \mid n \in \mathbf{N}\}$

4. Dopo aver definito la nozione di insieme aperto in $\mathbf{R}$, dimostrare che il seguente insieme non è aperto: $[-50, 10)$.

5. Si consideri la seguente successione definita ricorsivamente: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+1}$. Dimostrare che è decrescente, limitata inferiormente e calcolarne il limite.

6. Risolvere la seguente equazione in $\mathbf{C}$: $z^4 - iz^3 + 6z^2 = 0$.

7. Determinare tutti i numeri complessi z per cui $z^3\overline{z} = 16$.

8. Dimostrare che una successione convergente è limitata.

9. Calcolare il seguente limite:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n + n^2 + n^{1/n} + 3^n}{n^2 2^n + 3^{n+3}}$$

10. Calcolare massimo e minimo limite della successione: $a_n = \frac{(-1)^n n^3 + 5}{n^3}$.

11. Stabilire se la seguente serie converge
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 4}{2^n + n}.$$

12. Determinare tutti i valori di $x \in \mathbf{R}, x \neq 1$ per cui la seguente serie converge:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 + 1)}{n!} \left(\frac{2x}{x - 1} \right)^{2n}$$
.