

Primo Appello (Elementi di analisi 1) – 28/1/2008

Es 1 Calcolare i seguenti limiti di funzioni:

$$[1.1] \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x^2 - \cos x}{\operatorname{sen}(\log(1 + x^2))}; \quad [1.2] \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(\operatorname{senh}(2x)); \quad [1.3] \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - 1)}{x^3 + 1}.$$

Es 2 Studiare la funzione $f(x) = x - 10 \arctan x$.

Es 3 Calcolare i seguenti integrali indefinite (primitive)

$$[3.1] \int x \operatorname{sen} x \, dx; \quad [3.2] \int \frac{e^{1/x}}{x^2} \, dx; \quad [3.3] \int \frac{1}{\operatorname{sen} 2x} \, dx;$$

Es 4 Calcolare i seguenti integrali definiti

$$[4.1] \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{9 + x^2}} \, dx; \quad [4.2] \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x \, dx.$$

Es 5 (i) Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange.

(ii) Dimostrare che se $a > 1$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$.

(iii) Enunciare la regola di derivata per funzioni composte e funzioni inverse.

Risposte

Es 1. [1.1]: $3/2$. [1.2]: $\pi/2$. [1.3]: $-2/3$.

Es 2. Funzione dispari; $y = x \pm 5\pi$ asintoti obliqui; $x = \pm 3$ unici punti critici: -3 massimo locale, 3 minimo locale; 0 flesso; convessa per $x > 0$; concava per $x < 0$.

Es 3. [3.1]: $\operatorname{sen} x - x \cos x + c$. [3.2]: $-e^{1/x} + c$. [3.3]: $\frac{1}{2} \log |\tan x| + c$.

Es 4. [4.1]: $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{9 + x^2}} \, dx = \left[\frac{x}{2} \sqrt{9 + x^2} - \frac{9}{2} \log(x + \sqrt{9 + x^2}) \right]_0^1 = \frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{9}{2} (\log(1 + \sqrt{10}) + \log 3)$.

[4.2]: $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x \, dx = \left[\frac{3 - 4 \cos 2x + \cos 4x}{8} \right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{16} \pi$.