

Primo Appello – 28/1/2008

Es 1 [Pt. 10] Calcolare i seguenti limiti (al variare di x ove appaia):

[1.1] $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^x}$; [1.2] $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \log \left(1 + \sin(1/n)\right)$.

Es 2 [Pt. 10] Calcolare i seguenti limiti di funzioni:

[2.1] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x^2 - \cos x}{\sin(\log(1 + x^2))}$; [2.2] $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - 1)}{x^3 + 1}$.

Es 3 [Pt. 10] Studiare la convergenza delle seguenti serie (al variare di x ove appaia):

[3.1] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n n!}{n^n}$; [3.2] $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \tan \frac{1}{n^x}$.

Es 4 [Pt. 8] Studiare la funzione $f(x) = x - 10 \arctan x$.

Es 5 [Pt. 8] Calcolare i seguenti integrali indefinite (primitive)

[5.1] $\int x \sin x \, dx$; [5.2] $\int \frac{e^{1/x}}{x^2} \, dx$.

Es 6 [Pt. 10] Calcolare il seguente integrale definito: $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{9 + x^2}} \, dx$.

Es 7 [Pt. 10] Studiare la convergenza dell'integrale improprio: $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|\sin x| + x \log^2 x}}$.

Es 8 [Pt. 17] (i) Dare la definizione di estremo inferiore; dimostrare che $\inf E = -\sup(-E)$ (spiegando prima il significato dei simboli).

(ii) Dimostrare che se $a > 1$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$.

Es 9 [Pt.17] (i) Definire il campo complesso e Trovare le soluzioni dell'equazione $|z|z^{10} = i$.

(ii) Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange (o del valor medio).

(iii) Dare la definizione di funzione convessa e dimostrare che una funzione $f \in C^2$ con $f'' \geq 0$ è convessa.

Risposte

Es 1. [1.1]: 0 se $x > 1$, $1/e$ se $x = 1$, 1 se $x < 1$. [1.2]: 0.

Es 2. [2.1]: $3/2$. [2.2]: $-2/3$.

Es 3. [3.1]: diverge (criterio del rapporto). [3.1]: per $x \leq 0$ non converge (il termine generico non tende a 0); per $0 < x \leq 1$ converge ma non assolutamente (criterio di Leibnitz); per $x > 1$ converge assolutamente.

Es 4. Funzione dispari; $y = x \pm 5\pi$ asintoti obliqui; $x = \pm 3$ unici punti critici: -3 massimo locale, 3 minimo locale; 0 flesso; convessa per $x > 0$; concava per $x < 0$.

Es 5. [5.1]: $\sin x - x \cos x + c$. [5.2]: $-e^{1/x} + c$.

Es 6. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{9 + x^2}} \, dx = \left[\frac{x}{2} \sqrt{9 + x^2} - \frac{9}{2} \log(x + \sqrt{9 + x^2}) \right]_0^1 = \frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{9}{2} \left(\log(1 + \sqrt{10}) + \log 3 \right)$.

Es 7. Sia $f(x) = \sqrt{|\sin x| + x \log^2 x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} f/\sqrt{|x|} = 1$ quindi $1/f$ è integrabile vicino a 0; $\lim_{x \rightarrow \infty} f/(x \log^2 x) = 1$, quindi $1/f$ è integrabile su $[1, \infty)$. Dunque $1/f$ è integrabile su $(0, \infty)$.

Es 9. (i): $z = z_k = e^{it_k}$ con $t_k = \frac{\pi}{20} + k \frac{\pi}{5}$ e $k = 0, 1, \dots, 9$.