

**Secondo Appello – 18/2/2008**

**Es 1 [Pt. 10]** Calcolare i seguenti limiti (al variare di  $x$  ove appaia):

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n^2}\right)}{\log(1 + n^x)} ; \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2n+1} - \frac{x}{2}\right)^n .$$

**Es 2 [Pt. 10]** Studiare la convergenza delle seguenti serie (al variare di  $x$  ove appaia):

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n^2}\right)}{\log(1 + n^x)} ; \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n^2} - \frac{1}{n^{nx}}\right) .$$

**Es 3 [Pt. 10]** Calcolare i seguenti limiti di funzioni:

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} \tanh \frac{x + \sin x}{\log x} ; \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{Arcsen} \frac{e^x - 1}{\sin x} .$$

**Es 4 [Pt. 8]** Studiare la funzione  $f(x) = xe^{-x^2}$ .

**Es 5 [Pt. 14]** Calcolare i seguenti integrali indefiniti (primitive)

$$(i) \int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx ; \quad (ii) \int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx .$$

**Es 6 [Pt. 7]** Calcolare il seguente integrale improprio:  $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx$ .

**Es 7 [Pt. 7]** Studiare la convergenza dell'integrale improprio:

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{(\log \log x)^{\sqrt{2}} (\log x)x} dx .$$

**Es 8 [Pt. 10]** (i) Dimostrare che  $|z^2| = |z|^2$  per ogni numero complesso  $z$ .

(ii) Trovare le soluzioni  $z \in \mathbf{C}$  dell'equazione  $\frac{2}{iz} = z + i$ .

**Es 9 [Pt. 24]**

**9.1** Dare la definizione della funzione  $\cos x$  e dimostrarne l'esistenza del primo zero positivo.

**9.2** Dimostrare che la sucesione  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  è strettamente crescente e limitata.

**9.3** Enunciare e dimostrare il teorema di Weierstrass sui massimi e minimi delle funzioni continue.

**Risposte: Es 1.** (i): 0 se  $x > -2$ , 1 se  $x = -2$ ,  $\infty$  se  $x < -2$ . (ii):  $\infty$  se  $x < -1$ ;  $e^{1/4}$  se  $x = -1$ ; 0 se  $-1 < x < 3$ ; non ha limite se  $x \geq 3$ .

**Es 2.** (i): converge assolutamente se  $0 \neq x > -1$ ; diverge se  $x \leq -1$ . (ii): Diverge per  $x \leq 0$  e  $x > 1$ ; converge assolutamente altrimenti.

**Es 3.** (i): 1. (ii):  $\pi/2$ .

**Es 4.** Funzione dispari;  $y = 0$  asintoto orizzontale ( $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \exp(-x^2) = 0$ ); massimo assoluto  $(2e)^{-1/2}$  in  $x = 1/\sqrt{2}$ ; minimo assoluto  $-(2e)^{-1/2}$  in  $x = -1/\sqrt{2}$ ; derivata in 0 uguale ad 1; flessi in  $x = 0, \pm\sqrt{3/2}$ ; concava in  $(-\infty, -\sqrt{3/2}) \cup (0, \sqrt{3/2})$  e convessa altrimenti.

**Es 5.** (i):  $-\frac{1}{4} \cos(2x) - \frac{1}{2} \csc^2 x - 2 \log |\sin x|$ . (ii):  $6x^{1/6} - 3x^{1/3} + 2\sqrt{x} - 6 \log(1 + x^{1/6})$ .

**Es 6.** 1/2.

**Es 7.** Converge.

**Es 8.** (i):  $z = -\frac{1}{2}(i + \sqrt{-1 - 8i}) = -\frac{1}{2}\left(i \pm \sqrt[4]{65} e^{i(\pi + \operatorname{Arctan} 8)/2}\right)$ .