

Terzo Appello (Elementi di Analisi I)– 27/6/2008

Es 1 [Pt. 16] Calcolare i seguenti limiti di funzioni:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \tan \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^{16/17}} + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right); \quad (ii) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{2x} (1 - \cos e^{-x}).$$

Es 1 [Pt. 14] Studiare la funzione $f(x) = \frac{x^2 - x}{x + 5}$.

Es 3 [Pt. 30] Calcolare i seguenti integrali indefiniti (primitive):

$$(i) \int \frac{\log(\log x)}{x} dx; \quad (ii) \int_0^\infty \frac{x}{x^2 - 7x + 13} dx.$$

Es 4 [Pt. 20] Studiare la convergenza dei i seguenti integrali impropri:

$$(i) \int_0^\infty \frac{\sin}{x} dx; \quad (ii) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}} dx.$$

Es 5 [Pt. 20]

(i) Discutere i teoremi di Rolle e Lagrange.

(ii) Funzioni continue: definizione, teoremi, esempi, controesempi.

Risposte

Es 1. (i): $\tan 1 = 1.557\dots$ (ii): $1/2$.

Es 2. Asintoto verticale in $x = -5$; $f = 0$ per $x = 0$ e $x = 1$; $f < 0$ per $x < -5$ e per $x > 1$; $\lim_{x \rightarrow -5^+} f = \infty$; $\lim_{x \rightarrow -5^-} f = -\infty$; max relativo in $x_+ = \sqrt{30} - 5$ e in $x_- = -\sqrt{30} - 5$; concava per $x < -5$; convessa per $x > -5$; crescente in $x < x_-$ e $x > x_+$; decrescente altrimenti.

Es 3. (i) $(\log x)(\log(\log x) - 1)$. (ii) $\frac{7 \tan^{-1} \left(\frac{2x-7}{\sqrt{3}} \right)}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \log(x^2 - 7x + 13)$

Es 4. (i) converge. (ii): converge.