

Terzo Appello – 27/6/2008

Es 1 [Pt. 10] Calcolare i seguenti limiti (al variare di x ove appaia):

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\log(1 + \sqrt{n})]^x}{(\log n)^{100}} ; \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n k}{2n^3 + 1}.$$

Es 2 [Pt. 10] Studiare la convergenza delle seguenti serie (al variare di x ove appaia):

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}} ; \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{(-x)^n}{n^{10/9}} \right).$$

Es 3 [Pt. 10] Calcolare i seguenti limiti di funzioni:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \tan \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^{16/17}} + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) ; \quad (ii) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{2x} (1 - \cos e^{-x}).$$

Es 4 [Pt. 8] Studiare la funzione $f(x) = \frac{x^2 - x}{x + 5}$.

Es 5 [Pt. 14] Calcolare i seguenti integrali indefiniti (primitive)

$$(i) \int \frac{\log(\log x)}{x} dx ; \quad (ii) \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2 - 7x + 13} dx .$$

Es 6 [Pt. 14] Studiare la convergenza dei i seguenti integrali impropri:

$$(i) \int_0^{\infty} \frac{\sin}{x} dx ; \quad (ii) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1 - x^4}} dx .$$

Es 7 [Pt. 10] (i) Discutere la rappresentazione polare dei numeri complessi.

(ii) Trovare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $\frac{2}{\bar{z}} = z - i$.

Es 8 [Pt. 24]

8.1 Discutere la nozione di convessità (definizione, proprietà, teoremi, esempi e controesempi,...)

8.2 Dimostrare che se $\{a_n\}$ è una successione non decrescente o è illimitata oppure ha limite finito.

8.3 Enunciare e dimostrare il teorema sull'esistenza degli zeri per funzioni continue.

Risposte

Es 1. (i): 0 se $x < 100$; $1/2^{100}$ se $x = 100$; ∞ se $x > 100$. (ii): 0.

Es 2. (i): converge. (ii): converge assolutamente se $|x| < 1$; diverge se $x = 1$ converge se $x = -1$.

Es 3. (i): $\tan 1 = 1.557\dots$ (ii): $1/2$.

Es 4. Asintoto verticale in $x = -5$; $f = 0$ per $x = 0$ e $x = 1$; $f < 0$ per $x < -5$ e per $x > 1$; $\lim_{x \rightarrow -5+} f = \infty$; $\lim_{x \rightarrow -5-} f = -\infty$; max relativo in $x_+ = \sqrt{30} - 5$ e in $x_- = -\sqrt{30} - 5$; concava per $x < -5$; convessa per $x > -5$; crescente in $x < x_-$ e $x > x_+$; decrescente altrimenti.

Es 5. (i) $(\log x)(\log(\log x) - 1)$. (ii) $\frac{7 \tan^{-1} \left(\frac{2x-7}{\sqrt{3}} \right)}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \log(x^2 - 7x + 13)$

Es 6. (i) converge. (ii): converge.

Es 7. (ii) $z_1 = -1, z_2 = 2$.