Complemento 1
definizione di seno, coseno e pi greco

Dal criterio del rapporto (e di convergenza assoluta) segue che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge assolutamente per tutti gli $x \in \mathbb{R}$. Infatti, è possibile stimare la velocità con cui tale serie converge:

Lemma 1 *Siano $m \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$ tali che $m+1 \geq 2|x|$, allora*

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \leq 2 \, \frac{|x|^m}{m!} \ . \tag{1}$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} &= \frac{|x|^m}{m!} \Big(1 + \frac{|x|}{m+1} + \frac{|x|^2}{(m+2)(m+1)} + \frac{|x|^3}{(m+3)(m+2)(m+1)} + \cdots \Big) \\
&\leq \frac{|x|^m}{m!} \Big(1 + \frac{|x|}{m+1} + \frac{|x|^2}{(m+1)^2} + \frac{|x|^3}{(m+1)^3} + \cdots \Big) \\
&= \frac{|x|^m}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2 \frac{|x|^m}{m!} \ . \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Definizione 2 (Coseno e seno) *Per ogni $x \in \mathbb{R}$*

$$\begin{cases}
\cos x := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots \\[2ex]
\sin x := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots
\end{cases} \tag{2}$$

Chiaramente, le due serie in (2) convergono assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$ e

$$\begin{cases} \cos 0 = 1 \\ \sin 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\operatorname{sen} x \end{cases} \tag{3}$$

Il comportamento del seno e coseno "vicino" a $x = 0$ è il seguente:

Proposizione 3 *Per ogni* $|x| \le 1$ *si ha*

$$\begin{cases} |\cos x - 1| \le x^2 \\ |\sin x - x| \le \dfrac{|x|^3}{3} \end{cases} \tag{4}$$

Dimostrazione Dalla definizione di coseno e dal Lemma 1 segue che

$$|\cos x - 1| = \Big|\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\Big| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \le 2\,\frac{x^2}{2} = x^2 \ .$$

Analogamente,

$$|\sin x - x| = \Big|\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\Big| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} \le \sum_{k=3}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \le 2\,\frac{|x|^3}{6} = \frac{|x|^3}{3} \ . \quad \blacksquare \tag{5}$$

Le altre proprietà fondamentali delle funzioni "trigonometriche" seno e coseno sono raccolte nel seguente teorema che verrà dimostrato in seguito.

Teorema 4 *Per ogni* $x, y \in \mathbb{R}$ *si ha:*

(i) $\cos^2 x + \sin^2 x := (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$

(ii) $\begin{cases} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{cases}$

(iii) *esiste un numero* $0 < \alpha < 2$ *tale che* $\cos\alpha = 0$ *e* $\cos x > 0$ *per ogni* $x \in [0, \alpha)$.

Definizione 5 (Pi greco) $\pi := 2\alpha$ *dove* α *è il numero in* (iii).

Osservazione 6 **(a)** Dalle formule di addizione (ii) seguono immediatamente le formule di duplicazione:

$$\begin{cases} \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin 2x = 2 \sin x \cos x \ . \end{cases} \tag{6}$$

(b) Da (5) si ha che

$$\Big|\frac{\sin x}{x} - 1\Big| \le \frac{x^2}{3} < \frac{1}{3} \ , \qquad (0 < |x| < 1) \tag{7}$$

che implica

$$\frac{\sin x}{x} - 1 > -\frac{1}{3} \ , \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\sin x}{x} > \frac{2}{3} \ , \qquad (0 < |x| < 1) \ , \tag{8}$$

e quindi, in particolare, $\sin x > 0$ se $0 < x < 1$.

(c) Da (i) e (iii) si ha che $|\sin \pi/2| = 1$ e dal Teorema 4 e da (3) segue che, per ogni $0 \le x < \pi/2$,

$$\cos\Big(\frac{\pi}{2} - x\Big) = \sin\frac{\pi}{2}\ \sin x \ ;$$

quindi se $0 < x < \min\{1, \pi/2\}$, $\sin x > 0$ e $\sin \pi/2 > 0$, cioè, $\sin \pi/2 = 1$.

Dalle formule di duplicazione (6), insieme ai valori già discussi ($\cos 0 = 1 = \sin \pi/2$, $\sin 0 = 0 = \cos \pi/2$) si ottengono immediatamente i seguenti valori

$$\begin{cases} \cos 0 = 1\ , \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0\ , \quad \cos\pi = -1\ , \quad \cos\frac{3\pi}{2} = 0\ , \quad \cos 2\pi = 1 \\[2ex] \sin 0 = 0\ , \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1\ , \quad \sin\pi = 0\ , \quad \sin\frac{3\pi}{2} = -1\ , \quad \sin 2\pi = 0\ . \end{cases} \tag{9}$$

Infine, sempre da (ii), insieme a (9), segue che, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \cos(x + 2\pi) = \cos x\ , \\[2ex] \sin(x + 2\pi) = \sin x\ . \end{cases} \tag{10}$$