Complemento 2

continuità delle potenze e del logaritmo e tre limiti notevoli

Proposizione 7 (continuità delle potenze) *Sia x un numero reale diverso da zero e $\{a_n\}$ una successione di numeri tale che $a_n \geq 0$ e $\lim a_n = a$. Allora $\lim a_n^x = a^x$.*

Dimostrazione Poiché $a_n \geq 0$ si ha che $a := \lim a_n \geq 0$. Distinguiamo vari casi.

(i) Assumiamo $x > 0$ e $a = 0$. Sia $\varepsilon > 0$; esiste $N \in \mathbf{Z}_+$ tale che $a_n < \varepsilon^{1/x}$ per ogni $n \geq N$, e dunque, per tali n, $a_n^x < \varepsilon$, il che vuol dire $\lim a_n^x = 0$.

(ii) Assumiamo $x > 0$ e $a = 1$. Sia p un intero positivo tale che $p > x$ e poniamo $b_n = a_n - 1$. Allora, $\lim b_n = 0$ ed esiste N tale che $|b_n| < 1$ per ogni $n \geq N$ e, per tali n,

$$(1 - |b_n|)^p \leq (1 - |b_n|)^x \leq (1 + b_n)^x < (1 + |b_n|)^x < (1 + |b_n|)^p \ .$$

Ma le successioni a sinistra e a destra di queste disuguaglianze tendono a 1 (p è un intero e “il prodotto dei limiti è il limite del prodotto”) e quindi per il teorema del confronto per successioni anche $(1 + b_n)^x = a_n^x$ tende a 1.

(iii) Assumiamo $x > 0$ e $a > 0$. Allora, $\lim \dfrac{a_n^x}{a^x} = \lim \left(\dfrac{a_n}{a}\right)^x = 1$ e dunque $\lim a_n^x = a^x$.

(iv) Assumiamo $x < 0$ e $a > 0$. Allora, dalla definizione di potenza con esponente negativo e da (iii) segue che

$$\lim a_n^x = \lim \frac{1}{a_n^{-x}} = \frac{1}{a^{-x}} = a^x \ .$$

La dimostrazione è completa. ∎

Definizione 8 (Definizione di logaritmo naturale) *Se $x > 0$ chiamiamo logaritmo naturale di x e lo denotiamo con $\log x$ il logaritmo in base e di x*

$$\log x := \log_e x$$

dove e è il numero di Eulero $e = \lim(1 + 1/n)^n$.

Lemma 9

$$\log(1 + t) < t \ , \qquad \forall \ t > 0 \tag{11}$$

$$|\log(1 + t)| \leq 2|t| \ , \qquad \forall \ |t| \leq \frac{1}{2} \ . \tag{12}$$

Dimostrazione Poiché

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \cdots \ , \qquad (\forall\ t \in \mathbf{R}) \ , \tag{13}$$

se $t > 0$ si ha che $1 + t < e^t$ e prendendo il logaritmo di tale relazione (poiché i logaritmi in base $a > 1$ sono funzioni strettamente crescenti dell'argomento) segue la (11). Sia ora $-\frac{1}{2} \le t \le 0$ e poniamo $t = -s$ cosicché $0 \le s \le \frac{1}{2}$ e si noti che, in tal caso,

$$0 < \frac{1}{1-s} \le 1 + 2s \ .$$

Allora, per tali s, dalle proprietà del logaritmo e dalla (11) segue che

$$|\log(1+t)| = |\log(1-s)| = \log\frac{1}{1-s} \le \log(1+2s) \le 2s = 2|t| \ ,$$

che insieme alla (11) implica anche la (12). ∎

Proposizione 10 (continuità dei logaritmi) *Sia* $1 \ne a > 0$ *e sia* $\{x_n\}$ *una successione di numeri tale che* $x_n > 0$ *e* $\lim x_n = x > 0$*. Allora*

$$\lim_{n\to\infty} \log_a x_n = \log_a x \ . \tag{14}$$

Dimostrazione Consideriamo prima il caso in cui $a = e$. Sia $y_n := x_n/x$ cosicché $\lim y_n = 1$. Quindi esiste N tale che $|y_n - 1| < 1/2$ per ogni $n \ge N$; per tali n, dalle proprietà del logaritmo e da (12) segue che

$$|\log x_n - \log x| = |\log(x_n/x)| = |\log y_n| = |\log[1 + (y_n - 1)]| \le 2|y_n - 1| \to 0 \ ,$$

che è la (14) nel caso $a = e$. Tutti gli altri casi derivano dalla relazione

$$\log_a x = (\log_a e)(\log_e x) = (\log_a e)\log x \ . \quad ∎$$

Proposizione 11 (tre limiti notevoli) *Sia* $\{a_n\}$ *una successione di numeri reali diversi da zero e tale che* $\lim a_n = 0$ *allora*[1]*:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} = 1 \ , \tag{15}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \cos a_n}{a_n^2} = \frac{1}{2} \ , \tag{16}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1 + a_n)}{a_n} = 1 \ . \tag{17}$$

[1]Si noti che in (17) per poter definire il logaritmo va assunto che $1 + a_n > 0$, ma $a_n \to 0$ e quindi gli a_n sono definitivamente minori di 1 in modulo cosicché $1 + a_n > 0$ definitivamente.

Dimostrazione Dalla relazione (7) a pag. 2 del "Complemento 1" segue che è definitivamente vero che

$$\Big|\frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} - 1\Big| \le \frac{|a_n|^2}{3}$$

da cui segue la (15).

Analogamente a quanto fatto nella dimostrazione della Proposizione 3 del "Complemento 1", dalla definizione di coseno e dal Lemma 1, segue che se $|x| < 1$ allora

$$\left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}\right| = \Big|\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\Big| \le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \le \sum_{k=4}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \le 2\frac{x^4}{4!} = \frac{x^4}{12}\ ,$$

e quindi, se $0 < |x| \le 1$,

$$\Big|\frac{1-\cos x}{x^2} - \frac{1}{2}\Big| = \Big|\frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2}\Big| \le \frac{x^2}{12}\ , \qquad \forall\ 0 < |x| \le 1\ . \tag{18}$$

Ma allora poiché $|a_n| < 1$ per n sufficientemente grande, per tali n si ha che

$$\Big|\frac{1-\cos a_n}{a_n^2} - \frac{1}{2}\Big| \le a_n^2$$

da cui, prendendo il limite, segue (16).

Per dimostrare la (17), poniamo $b_n := \log(1 + a_n)$. Dalla Proposizione 10 segue che $\lim b_n = \log 1 = 0$. Sia N tale che $|b_n| < 1$ per ogni $n \ge N$; per tali n, dalla definizione di b_n, dalla (13) e dal Lemma 1 del "Complemento 1" (con $m = 2$) segue che

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_n}{\log 1 + a_n} - 1\right| &= \left|\frac{e^{b_n} - 1}{b_n} - 1\right| = \left|\frac{e^{b_n} - 1 - b_n}{b_n}\right| = \frac{\left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_n^k}{k!}\right|}{|b_n|} \\
&\le \frac{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{|b_n|^k}{k!}}{|b_n|} \le \frac{|b_n|^2}{|b_n|} = |b_n|\ ,
\end{aligned}$$

e quindi, prendendo il limite, $\lim \dfrac{a_n}{\log 1 + a_n} = 1$ da cui segue anche la (17). ∎