Complemento 3

La derivata di seno e coseno

Lemma 12

$$|(x+h)^m - x^m| \le |h| \; (1+|x|)^m \;, \qquad \forall x \;,\; \forall \; |h| \le 1 \;,\; \forall \; m \in \mathbb{Z}_+ \;. \tag{19}$$

Dimostrazione Dal binomio di Newton e dal fatto che $|h| \le 1$ segue:

$$\begin{aligned} |(x+h)^m - x^m| &= \Big|\sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} h^j x^{m-j}\Big| \\ &\le |h| \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} |h|^{j-1}|x|^{m-j} \\ &\le |h| \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} |x|^{m-j} \\ &\le |h| \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} |x|^{m-j} \\ &= |h| \; (1+|x|)^m \;. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Osservazione 13 Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sono due serie convergenti, dalla definizione di convergenza per serie e dai teoremi sui limiti, segue immediatamente che, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, anche la serie $\sum(\alpha\, a_n + \beta\, b_n)$ è convergente e

$$\sum(\alpha\, a_n + \beta\, b_n) = \alpha \sum a_n + \beta \sum b_n \;.$$

Proposizione 14 $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.

Dimostrazione Dalla definizione (per serie) del seno e coseno e dall'Osservazione 13 segue che, per ogni $N \in \mathbb{Z}_+$,

$$\begin{aligned} &\Big|\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} - \cos x\Big| \\ &\qquad = \Big|\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \, \frac{(x+h)^{2n+1} - x^{2n+1}}{h} - (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\Big| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big|\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\;\frac{(x+h)^{2n+1}-x^{2n+1}}{h}\;-(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\Big|\\
&\quad+\Big|\sum_{n=N}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\;\frac{(x+h)^{2n+1}-x^{2n+1}}{h}\;-(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\Big|\\
&= \Big|\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\;\Big(\frac{(x+h)^{2n+1}-x^{2n+1}}{h}\;-(2n+1)x^{2n}\Big)\Big|\\
&\quad+\Big|\sum_{n=N}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\;\frac{(x+h)^{2n+1}-x^{2n+1}}{h}\;-(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\Big|\\
&\le |A_N(x,h)|+B_N(x,h)
\end{aligned}
\tag{20}
$$

con

$$
\begin{cases}
A_N(x,h) := \Big|\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\;\Big(\frac{(x+h)^{2n+1}-x^{2n+1}}{h}\;-(2n+1)x^{2n}\Big)\Big|\\[2ex]
B_N(x,h) := \displaystyle\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\;\frac{|(x+h)^{2n+1}-x^{2n+1}|}{|h|}\;+\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}
\end{cases}
\tag{21}
$$

Dal Lemma 12 e dal Lemma 1 (Complemento 1) segue che, se $|h|\le 1$ e $N+1\ge 2|x|$, allora

$$
\begin{aligned}
B_N(x,h) &\le \sum_{n=N}^{\infty}\frac{(1+|x|)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}\\
&\le 2\Big(\frac{(1+|x|)^{2N+1}}{(2N+1)!}+\frac{|x|^{2N}}{(2N)!}\Big)\ .
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Notiamo anche che, poiché la derivata di x^m è mx^{m-1}, per ogni x e per ogni N

$$
\lim_{h\to 0}A_N(x,h)=0\ . \tag{23}
$$

Fissiamo ora $x\in\mathbb{R}$ e $\varepsilon>0$. Da (22) segue che esiste $N=N(\varepsilon,x)>2|x|-1$ tale che

$$
B_N(x,h)<\frac{\varepsilon}{2}\qquad \forall\ |h|\le 1\ . \tag{24}
$$

Da (23) segue che esiste $0<\delta\le 1$ tale che $|A_N(x,h)|<\varepsilon/2$ per ogni $0<|h|<\delta$, il che implica, assieme a (20) e (24) che, per tali h,

$$
\Big|\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h}-\cos x\Big|<\varepsilon
$$

ossia che $(\operatorname{sen}x)'=\cos x$.

In maniera del tutto analoga si dimostra che $(\cos x)'=-\operatorname{sen}x$. ∎