Complemento 4

Una caratterizzazione della derivata

Osservazione 15 (i) Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che

$$0 \neq b_n \to 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R} \tag{25}$$

allora $\lim a_n = 0$. Altrimenti, esisterebbero $\varepsilon > 0$ ed una sottosuccessione $|a_{n_k}| > \varepsilon$ ed il limite in (25) non potrebbe esistere finito.
(ii) Da (i) segue immediatamente che se esiste finito il limite $\lim_{x\to x_0} f(x)/(x-x_0)$ allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.
(iii) Se f è derivabile in x_0 esiste il limite del rapporto incrementale $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ e quindi, per (ii), $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ cioè f è continua in x_0.

Proposizione 16 *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in (a,b)$. La funzione f è derivabile in x_0 se e solo se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \alpha x - \beta}{x - x_0} = 0 \ ; \tag{26}$$

inoltre, in tal caso,

$$\alpha = f'(x_0) \ , \qquad \beta = f(x_0) - f'(x_0)x_0 \ . \tag{27}$$

Dimostrazione Assumiamo che esista il limite in (26). Dal punto (ii) dell'Osservazione 15 segue che il numeratore tende a zero, cioè,

$$\beta = f(x_0) - \alpha x_0 \ , \tag{28}$$

e (26) diventa

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \alpha = 0 \ ,$$

cioè f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = \alpha$.
Viceversa, se f è derivabile in x_0, allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \tag{29}$$

che, se si definiscono α e β come i (27), diventa la (26). ∎