

Complemento 5

Dimostrazione del Teorema 4 e grafici di seno e coseno

Nel *Complemento 1* sono stati definiti (per serie) il seno ed il coseno ed è stato enunciato il seguente

Teorema 4 Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha:

$$(i) \quad \cos^2 x + \sin^2 x := (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

$$(ii) \quad \begin{cases} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{cases}$$

(iii) esiste un numero $0 < \alpha =: \frac{\pi}{2} < 2$ tale che $\cos \alpha = 0$ e $\cos x > 0$ per ogni $x \in [0, \alpha)$.

Nel *Complemento 3* è stato dimostrato che

$$D \sin x = \cos x, \quad D \cos x = -\sin x, \quad (30)$$

dove $Du = u'$ denota la derivata di u .

Diamo, ora, la **dimostrazione del Teorema 4**.

(i): Dalle regole di derivazione e da (30) segue che

$$D(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2 \sin x \cos x + 2 \cos x (-\sin x) = 0.$$

Dunque la funzione $g(x) := \sin^2 x + \cos^2 x$ è identicamente costante e poiché $g(0) = \cos^2 0 + \sin^2 0 = 1$ si ha la relazione (i).

Per dimostrare le formule in (ii) faremo uso del seguente

Lemma 17 Sia $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione due volte derivabile e tale che

$$u'' + u = 0, \quad \begin{cases} u(x_0) = 0 \\ u'(x_0) = 0 \end{cases} \quad (31)$$

per un qualche $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora u è identicamente uguale a 0.

Dimostrazione (Lemma 17) Sia $h(x) := \frac{1}{2}(u(x)^2 + u'(x)^2)$. Dalle regole di derivazione e per l'equazione differenziale (31) segue che $h' = uu' + u'u'' = u'(u + u'') = 0$ quindi h è identicamente costante su \mathbb{R} ; poiché $h(x_0) = 0$ si ha che $h(x) = 0$ per ogni x , e questo significa che $u \equiv 0$ cioè la tesi. ■

(ii): Fissato y , si definisca $u(x) := \cos(x + y) - \cos x \cos y + \sin x \sin y$. Dalle regole di derivazione e dalla (30) segue che $u' = -\sin(x + y) + \sin x \cos y + \cos x \sin y$ e $u'' = -\cos(x + y) + \cos x \cos y - \sin x \sin y = -u$ quindi u soddisfa l'equazione differenziale in (31) ed inoltre $u(0) = 0 = u'(0)$. Dunque, per il Lemma 17 u è identicamente nulla cioè vale la prima formula in (ii). La seconda formula si ottiene dalla prima derivando ambo i membri rispetto ad x e moltiplicando ambo i membri per -1 .

Alla dimostrazione del punto (iii) premettiamo la seguente

Osservazione 18 Dalla dimostrazione della esistenza degli zeri per funzioni continue su di un intervallo $[a, b]$ dove $f(a) > 0 > f(b)$ segue che

$$\exists x_0 \in (a, b), \quad f(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad f(x) > 0 \quad \forall x \in [a, x_0]. \quad (32)$$

(iii): Dalla definizione di coseno segue che

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{4!} + a = -\frac{1}{3} + a, \quad a := \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!}. \quad (33)$$

Dal Lemma 1 (*Complemento 1*) si ha che

$$|a| \leq \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!} < \sum_{k=6}^{\infty} \frac{2^k}{k!} < 2 \frac{2^6}{6!} = \frac{8}{45}$$

Quindi

$$\cos 2 = -\frac{1}{3} + a \leq -\frac{1}{3} + |a| < -\frac{1}{3} + \frac{8}{45} = -\frac{7}{45} < 0.$$

Ora poiché $\cos x$ è una funzione continua (essendo ovunque derivabile) e $\cos 0 = 1 > 0$ e $\cos 2 < 0$, dall'osservazione 18 segue (iii). ■

Grafici di seno e coseno Poiché $(\sin x)' = \cos x > 0$ in $[0, \pi/2)$ segue che la funzione $\sin x$, che in 0 vale 0, è strettamente crescente su $(0, \pi/2)$ ed in $\pi/2$ vale 1 (si ricordino i valori speciali nella (9) del *Complemento 1* dedotti come conseguenza del Teorema 4). Inoltre $(\sin x)'' = -\sin x < 0$ in $(0, \pi/2)$ e quindi il seno è concavo in $(0, \pi/2)$; $\pi/2$ è un massimo assoluto stretto; infine la tangente al grafico del seno in $x = 0$ ha coefficiente

angolare 1 (cioè $(\sin x)'|_{x=0} = 1$). Questo determina completamente il grafico di $\sin x$ in $(0, \pi/2)$. Osservando che dalle formule di addizione (ii) segue che

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad (34)$$

si vede che la retta $\{x = \pi/2\}$ è un asse di simmetria del grafico del seno (cioè il grafico del seno su $(\pi/2, \pi)$ non è altro che l'immagine simmetrica del seno tra $(0, \pi/2)$). Dalla disparità del seno ($\sin(-x) = -\sin x$), possiamo ricostruire il grafico del seno anche tra $(-\pi, 0)$ e quindi dappertutto essendo il seno periodico di periodo 2π . Sempre da (34) segue che il grafico del coseno è semplicemente il grafico del seno traslato di $\pi/2$ ("verso sinistra").

