

Complemento 6

Lunghezza di curve e proprietà geometriche di seno e coseno

Definizione 19 Sia $f \in C^1((a, b))$

$$G_f = G_f(a, b) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), x \in (a, b)\} . \quad (35)$$

Si definisce lunghezza di G_f il numero¹

$$\ell(G_f(a, b)) := \int_a^b \sqrt{1 + |f'|^2} . \quad (36)$$

Osservazione 20 (i) Se $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ sono due elementi di \mathbb{R}^2 con $x_1 < x_2$, allora il segmento

$$\sigma(z_1, z_2) := \{z_1 + t(z_2 - z_1) = (x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1)) : t \in (0, 1)\} \quad (37)$$

coincide con il grafico di

$$f(x) := y_1 + (x - x_1) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

per $x \in (x_1, x_2)$. Poiché $f' = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, dalla Definizione 19 segue che la lunghezza di $\sigma(z_1, z_2)$ è data da

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2} = (x_2 - x_1) \sqrt{1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} ,$$

che, per definizione è la distanza euclidea tra z_1 e z_2 .

(ii) Se denotiamo con

$$S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \quad (38)$$

la circonferenza unitaria in \mathbb{R}^2 , se

$$f_{\pm} := \pm\sqrt{1 - x^2} \quad (39)$$

e $z_- = (-1, 0)$ e $z_+ = (1, 0)$, allora si ha che

$$S^1 = G_{f_+}(-1, 1) \cup G_{f_-}(-1, 1) \cup \{z_-\} \cup \{z_+\} . \quad (40)$$

¹A priori questo è un integrale generalizzato o improprio ed il suo valore potrebbe essere ∞ .

Possiamo dunque definire la lunghezza di S^1 come²

$$\ell(S^1) := \ell(G_{f_+}(-1, 1)) + \ell(G_{f_-}(-1, 1)) . \quad (41)$$

D'altra parte

$$\sqrt{1 + |f'_\pm|^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} , \quad (42)$$

e quindi, dal teorema fondamentale del calcolo segue che

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1 + |f'_\pm|^2} &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = -\int_{-1}^1 (\operatorname{Arccos} x)' \\ &= \operatorname{Arccos}(-1) - \operatorname{Arccos}(1) = \pi - 0 = \pi , \end{aligned} \quad (43)$$

cosicch  $\ell(S^1) = 2\pi$.

Da calcoli analoghi segue facilmente la seguente Proposizione che descrive le propriet  geometriche del seno e del coseno.

Proposizione 21 *Sia $(x, y) \in S^1$. Esiste un unico $t \in [0, 2\pi)$ tale che*

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad (44)$$

Inoltre, tale t coincide con la lunghezza dell'“arco in S^1 che va da $(1, 0)$ a (x, y) in senso antiorario” o pi  precisamente:

$$t = \begin{cases} \ell(G_{f_+}(x, 1)) , & \text{se } y \geq 0 , \\ \pi + \ell(G_{f_-}(-1, x)) , & \text{se } y < 0 \end{cases} \quad (45)$$

dove f_\pm   definito in (39).

Dimostrazione Se $y \geq 0$ e $x \in [-1, 1]$, da (45), segue che³

$$\begin{aligned} t &= \int_x^1 \sqrt{1 + |f'_+|^2} = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi = -\int_x^1 (\operatorname{Arccos} \xi)' \\ &= \operatorname{Arccos}(x) - \operatorname{Arccos}(1) = \operatorname{Arccos}(x) . \end{aligned} \quad (46)$$

²Gli insiemi a destra della equazione in (40) sono disgiunti e i punti, per definizione, hanno lunghezza nulla.

³ $\operatorname{Arccos}(x)$   l'inversa di $t \in [0, \pi] \rightarrow \cos t$.

Dunque $\cos t = x$ e $y = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \cos^2 t} = |\sin t| = \sin t$ poiché $t \in [0, \pi]$ dove il seno è positivo.

Se, invece, $y < 0$ e $x \in (-1, 1)$, da (45), segue che

$$\begin{aligned} t &= \pi + \int_{-1}^x \sqrt{1 + |f'_-|^2} = \pi + \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi = \pi + - \int_{-1}^x (\operatorname{Arccos} \xi)' \\ &= \pi + \operatorname{Arccos}(-1) - \operatorname{Arccos}(x) = 2\pi - \operatorname{Arccos}(x). \end{aligned} \quad (47)$$

Si noti che i valori di Arccos sono in $[0, \pi]$ e dunque t , in (47) è un numero tra π e 2π . Dunque $\cos t = \cos(2\pi - \operatorname{Arccos}(x)) = x$ e $y = -\sqrt{1 - x^2} = -\sqrt{1 - \cos^2 t} = -|\sin t| = \sin t$, poiché $t \in (\pi, 2\pi)$ dove il seno è negativo.

Abbiamo dimostrato la validità di (44) con t definito in (45). Passiamo all'unicità.

Supponiamo, per assurdo, che esistano $0 \leq t_1 < t_2 < 2\pi$, tali che

$$\begin{cases} \cos t_1 = x = \cos t_2 \\ \sin t_1 = y = \sin t_2 \end{cases} \quad (48)$$

Poiché il coseno è iniettivo in $[0, \pi]$ e in $(\pi, 2\pi)$ segue che $t_1 \leq \pi < t_2$, ma questo contraddice la seconda relazione in (48) poiché il seno è non negativo in $[0, \pi]$ e strettamente negativo in $(\pi, 2\pi)$. ■

Osservazione 22 (i) La Proposizione 21 mostra che la mappa

$$t \in [0, 2\pi) \rightarrow \Phi(t) := (x, y) = (\cos t, \sin t) \in S^1 \quad (49)$$

fornisce una corrispondenza biunivoca (iniettiva e surgettiva) tra l'intervallo $[0, 2\pi)$ e la circonferenza unitaria S^1 .

(ii) Dalla periodicità di seno e coseno segue anche che Φ mette in corrispondenza biunivoca un qualunque intervallo $[a, a + 2\pi)$ con S^1 . Vale infatti la seguente affermazione: Per ogni $(x, y) \in S^1$ e per ogni $a \in \mathbb{R}$, $\exists! t \in [a, a + 2\pi)$ tale che vale la relazione (44).

Dimostrazione Esistenza: dalla Proposizione 21 segue che esiste $t_0 \in [0, 2\pi)$ tale che $\cos t_0 = x$ e $\sin t_0 = y$. Allora se⁴ $k := [(a - t_0)/(2\pi)]$, $t := t_0 + 2\pi k \in [a, a + 2\pi)$ e $\cos t = \cos t_0$ e $\sin t = \sin t_0$.

Unicità: siano $t_1, t_2 \in [a, a + 2\pi)$ tali che $\cos t_1 = \cos t_2$ e $\sin t_1 = \sin t_2$. Siano k_1 e k_2 due interi tali che $s_i := t_i - 2\pi k_i \in [0, 2\pi)$ ($k_i := [t_i/(2\pi)]$). Allora $\cos s_i = x$ e $\sin s_i = y$ e quindi, per la Proposizione 21, $s_1 = s_2$ e dunque (poiché t_1 e t_2 stanno nell'intervallo $[a, a + 2\pi)$) $|t_1 - t_2| = 2\pi|k_1 - k_2| < 2\pi$ cioè $|k_1 - k_2| < 1$ che implica $k_1 = k_2$, ossia, $t_1 = t_2$. ■

⁴ $[x]$ denota la parte intera di x : $0 \leq x - [x] < 1$.