Complemento 7

Alcune proprietà di $\mathbb{R}^2$

1. ($\mathbb{R}^2$ come spazio vettoriale) $\mathbb{R}^2$, ossia l'insieme delle coppie ordinate (x,y) con x e y in $\mathbb{R}$ è *uno spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$ cioè è possibile definire la somma di due elementi (o "vettori") di $\mathbb{R}^2$ ed il prodotto di un vettore $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ con uno "scalare" $a\in\mathbb{R}$:

- $(x_1,y_1)+(x_2,y_2) := (x_1+x_2, y_1+y_2)$ $\quad (\mathrm{A}_1)$
- $a(x,y) := (ax, ay)$ $\quad (\mathrm{P}_1)$

È immediato verificare che

la somma in (A_1) *è commutativa e associativa; l'elemento neutro è* $0 := (0,0)$*; per ogni vettore* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *esiste l'opposto* $-(x,y) := (-x,-y)$ *tale che* $(x,y)+\big(-(x,y)\big)=0$*; vale la proprietà distributiva.*

2. (Coordinate polari) $\forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{0\}\ \exists!\ (r,t)\in(0,\infty)\times[0,2\pi)$ tale che

$$x = r\cos t\ , \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,t\ ; \tag{50}$$

infatti: $r := \sqrt{x^2+y^2}$ cosicché $(x/r, y/r)\in S^1$ e t è l'unico numero in $[0,2\pi)$ (vedi Proposizione 21) tale che $(x/r,y/r) = (\cos t, \mathrm{sen}\,t)$.

Definizione 23 *Se* $z=(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ *e* $(r,t)\in(0,\infty)\times[0,2\pi)$ *sono le sue coordinate polari,* r *prende il nome di* norma *di* z*, e si denota* $r := \|z\|$*, e* t *prende il nome di* argomento principale *di* z *e si denota con* $t = \mathrm{Arg}\,(z)$*.*

3. (Prodotto scalare e disuguaglianza di Cauchy–Schwartz) Se (x_1,y_1) e (x_2,y_2) sono due elementi di $\mathbb{R}^2$ si definisce il loro *prodotto scalare* come

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) := x_1x_2 + y_1y_2\ . \tag{51}$$

È immediato verificare che

il prodotto scalare è commutativo ed è lineare in ogni componente, cioè

$$(a_1x_1 + a_2x_2, y) = a_1(x_1,y_1) + a_2(x_2,y)\ ,$$

(ed analogamente per la seconda componente).

Osservazione 24 (i) $z \cdot z = \|z\|^2$ per ogni $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
(ii) Il prodotto scalare ha una semplice interpretazione geometrica. Siano $z_i := (x_i, y_i) \neq 0$ due vettori in $\mathbb{R}^2$ non nulli, e siano (r_i, t_i) le coordinate polari di z_i. Dalle formule di addizione per il coseno otteniamo:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos t_1, \operatorname{sen} t_1) \cdot r_2(\cos t_2, \operatorname{sen} t_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos t_1 \cos t_2 + \operatorname{sen} t_1 \operatorname{sen} t_2) \\ &= r_1 r_2 \cos(t_1 - t_2) \ . \end{aligned} \tag{52}$$

Da tale relazione segue in particolare la seguente **disuguaglianza di Cauchy–Schwartz**:

$$|z_1 \cdot z_2| \leq \|z_1\| \, \|z_2\| \ , \qquad \forall \ z_i \in \mathbb{R}^2 \ . \tag{53}$$

(Si noti che se uno dei vettori z_i è nullo tale disuguaglianza è ovviamente verificata col segno =).
(iii) Vista la grande importanza della disuguaglianza di Cauchy–Schwartz , ne diamo una seconda dimostrazione algebrica (ossia che non fa uso delle funzioni trigonometriche). Riscriviamo la (53):

$$|x_1 y_1 + x_2 y_2| \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \ \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \ . \tag{54}$$

Dividendo per $r_1 r_2$ i termini nella (54) ed usando (51), si ha che (54) è equivalente a

$$|(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \cdot (\bar{x}_2, \bar{y}_2)| \leq 1 \tag{55}$$

dove $\bar{x}_i := x_i / r_i$ e $\bar{y}_i := y_i / r_i$, cosicché $(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in S^1$. Si osservi che,

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \ , \qquad \forall \ a, b \in \mathbb{R}, \tag{56}$$

poiché tale relazione è equivalente alla relazione $(a - b)^2 \geq 0$. Dunque,

$$|(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \cdot (\bar{x}_2, \bar{y}_2)| \leq |\bar{x}_1||\bar{x}_2| + |\bar{y}_1||\bar{y}_2| \leq \frac{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}{2} + \frac{\bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2}{2} = \frac{\bar{x}_1^2 + \bar{y}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{y}_2^2}{2} = 1 \ . \qquad \blacksquare$$

4. (Disuguaglianza triangolare) *Per ogni* $z_i := (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ *si ha*

$$\|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\| \ . \tag{57}$$

Dimostrazione Elevando al quadrato e "cancellando termini uguali" si vede che la relazione (57) è equivalente a

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \ \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \ .$$

Questa relazione è implicata da

$$|x_1 x_2| + |y_1 y_2| \le \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\ \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\ ,$$

che, a sua volta (elevando di nuovo al quadrato a cancellando termini uguali), è equivalente a

$$|x_1 x_2 y_1 y_2| \le \frac{x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2}{2}\ . \tag{58}$$

Tale disuguaglianza è ovviamente soddisfatta se uno dei fattori a sinistra è nullo; se, invece, $y_i \neq 0$, dividendo ambo i membri per $y_1^2 y_2^2$, si vede che la (58) è equivalente a

$$ab \le \frac{a^2 + b^2}{2} \quad \text{con} \quad a := \frac{|x_1|}{|y_1|}\ ,\ b := \frac{|x_2|}{|y_2}$$

che è vera (vedi (56)). ∎

5. (norma e distanza) Dalla definizione di norma e dal punto **4** segue subito che la norma verifica le seguenti proprietà ("assiomi della norma"):

(n_1) $\|z\| \ge 0$, $\forall\ z \in \mathbb{R}^2$ e $\|z\| = 0$ se e solo se $z = 0$

(n_2) $\|az\| = |a|\|z\|$, $\forall z \in \mathbb{R}^2$ e $a \in \mathbb{R}$

(n_3) $\|z_1 + z_2\| \le \|z_1\| + \|z_2\|$, $\forall\ z_i \in \mathbb{R}^2$

Definizione 25 *Se z_1 e z_2 sono due elementi di $\mathbb{R}^2$ si definisce la* **distanza** *(o "distanza euclidea") di z_1 da z_2 il numero non negativo*

$$d(z_1, z_2) := \|z_1 - z_2\|\ . \tag{59}$$

Dalle prorpietà della norma (i)÷(iii) segue immediatamente che la distanza verifica le seguenti proprietà ("assiomi della distanza"):

(d_1) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$, $\forall\ z_i \in \mathbb{R}^2$ e $d(z_1, z_2) = 0$ se e solo se $z_1 = z_2$

(d_2) $d(z_1, z_2) \le d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$, $\forall\ z_i \in \mathbb{R}^2$