Primo Esonero – 5/11/2007

N.B. • *Il punteggio totale è in trentesimi; il punteggio di ogni singolo esercizio è indicato tra parentesi quadrate.*
• *È* **vietato**: *parlare, scambiarsi informazioni; consultare testi, appunti, etc.; l'uso del cellulare, calcolatrici, etc.*
• *Le risposte vanno sempre motivate chiaramente e sinteticamente! Risposte senza giustificazioni non danno punteggio.*

Es 1 [Pt. 3] Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che verifica la disuguaglianza $|x-1|(x-2) > 2$.

Es 2 [Pt. 3] Trovare gli estremi inferiore e superiore dei seguenti insiemi e dire se si tratta di minimo o massimo: **(2.1):** $\{-1\} \cup [0,1] \cup (2,\infty)$; **(2.1):** $\{x \in \mathbb{Q} : \ x \in (-1,1] \text{ e } x^2 < \frac{1}{5}\}$.

Es 3 [Pt. 4] Dare la definizione di limite per una successione di numeri reali e trovare L ed N tale che $\left|\frac{2n^2}{n^2+2} - L\right| < 10^{-9}$, per ogni $n \geq N$.

Es 4 [Pt. 5] Calcolare i seguenti limiti
(4.1) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{5})^n$; **(4.2)** $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{10}}\right)^{\frac{1}{n}}$; **(4.3)** $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{10}}\right)^{-n}$; **(4.4)** $\lim_{n\to\infty} (\log_2 n)^{-(2n^2+1)}$.

Es 5 [Pt. 5] Calcolare, al variare di x, i limiti: **(5.1)** $\lim_{n\to\infty} \frac{|x-1|^{11\,n}}{(2n)!}$, **(5.2)** $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{7x}}{(n^{\sqrt{7}} + n^2)^5}$.

Es 6 [Pt. 4] Studiare il comportamento (al variare di x) delle seguenti serie
(6.1) $\sum_{n=2}^{\infty} n^{20} x^{\sqrt{2}n}$,   **(6.2)** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n + n^x}{n^2 + n^5}$.

Es 7 [Pt. 3] Dimostrare, specificando quali assiomi di $\mathbb{R}$ vengono usati, la formula di "addizione per frazioni": $\frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \cdots$.

Es 8 [Pt. 3] Dimostrare, per induzione, che, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, a \geq -1$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Es 9 [Pt. 3] Enunciare e dimostrare il teorema del confronto per successioni ("teorema dei carabinieri").

Es 10 [Pt. 3] Definire il logaritmo in base 2 e dimostrare che $\log_2 x^y = y \log_2 x$, specificando per quali x e y tale uguaglianza vale.

Risposte 1: $\{x > 3\}$. **2.1:** -1 è il min; non è limitato superiormente. **2.2:** $\inf = -1/\sqrt{5}$, $\sup = 1/\sqrt{5}$ (e non sono min/max). **3:** $L = 2$, $N = 200000$. **4.1:** ∞; **4.2:** 1; **4.3:** ∞; **4.4:** 0. **5.1:** 0, per ogni x; **5.2:** ∞ se $x > 5/\sqrt{7}$, 1 se $x = 5/\sqrt{7}$, 0 se $x < 5/\sqrt{7}$. **6.1:** converge per $0 \leq x < 1$, diverge se $x \geq 1$. **6.2:** converge assolutamente per $|x| \leq 1$, diverge per $x > 1$, non converge per $x < -1$.