

**Secondo esonero – 3/12/2007**

**N.B.** • Il punteggio totale è in centesimi; il punteggio di ogni singolo esercizio è indicato tra parentesi quadrate.

- È vietato: parlare, scambiarsi informazioni; consultare testi, appunti, etc.; l'uso del cellulare, calcolatrici, etc.
- Le risposte vanno sempre motivate chiaramente e sinteticamente! Risposte senza giustificazioni non danno punteggio.
- Durante lo svolgimento del test non è possibile lasciare l'aula se non dietro presentazione di certificato medico.
- Alla consegna dell'elaborato, firmare l'apposito elenco accanto al proprio nome. Dopo la prima ora dall'inizio del test è possibile abbandonare il test non consegnando l'elaborato.
- Dopo i primi 30 minuti dall'inizio del test è possibile fare domande ai docenti esclusivamente circa l'interpretazione del testo.

**Es 1 [Pt. 15]** Calcolare i seguenti limiti (al variare di  $x$  qualora appaia)

$$\begin{aligned}
 \text{[1.1]} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}; \quad \text{[1.2]} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^{\sqrt{2n}} + e^n}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}}; \\
 \text{[1.3]} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} x^{\log_7 \frac{1}{n}}.
 \end{aligned}$$

**Es 2 [Pt. 25]** Studiare il comportamento delle seguenti serie (al variare di  $x$  qualora appaia)

$$\begin{aligned}
 \text{[2.1]} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 - 1} - n}{\sqrt{n}}; \quad \text{[2.2]} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{(\log n)^n + 2^n}; \quad \text{[2.3]} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n} + n^x}{2^n}. \\
 \text{[2.4]} \quad & \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/2)}{\log \log \log n}; \quad \text{[2.5]} \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n}} - \cos \frac{1}{n}.
 \end{aligned}$$

**Es 3 [Pt. 24]** Calcolare i seguenti limiti

$$\begin{aligned}
 \text{[3.1]} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{e^x - 1}; \quad \text{[3.2]} \quad \lim_{x \rightarrow 0} |\log x|^x; \quad \text{[3.3]} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(14/5)^x}{\cosh x}; \\
 \text{[3.4]} \quad & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin x}{\cos x}; \quad \text{[3.5]} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 7x}{x + \sin 3x}; \quad \text{[3.6]} \quad \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}.
 \end{aligned}$$

**Es 4 [Pt. 12]** (i) Dimostrare che se  $a > 1$ , allora  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty$ .

(ii) Dimostrare che da ogni successione limitata è possibile estrarre una sottosuccessione convergente.

**Es 5 [Pt. 24]** (i) Discutere brevemente la nozione di continuità per funzioni su  $A \subseteq \mathbb{R}$  (definizione, caratterizzazione, esempi, controesempi).

(ii) Dire dove è continua la funzione  $[x](x - 1)$  (dove  $[x]$  denota la funzione parte intera di  $x$ ).

(iii) Enunciare e dare uno schema della dimostrazione del teorema di permanenza del segno per funzioni continue.

---

**Risposte 1.1:** 1. ;  $e^{-1}$ . **1.2:**  $\infty$ . **1.3:** 0 se  $x = 0$ ;  $\infty$  se  $0 < x < 1$ ; 1 se  $x = 1$ ; 0 se  $x > 1$ .

**2.1:** converge. **2.2:** converge. **2.3:** converge se e solo se  $|x| < \sqrt{2}$ . **2.4:** converge (Leibnitz). **2.5:** diverge.

**3.1:** 1. **3.2:** 1. **3.3:**  $\infty$ . **3.4:** 0. **3.5:**  $-3/2$ . **3.6:** 3.

**5.2:** la funzione è continua in  $\{1\} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .