Terzo esonero – 28/1/2008

Es 1 [Pt. 10] Studiare la funzione $f(x) = x - 10 \arctan x$.

Es 2 [Pt. 15] Calcolare i seguenti integrali indefinite (primitive)

$$[\mathbf{2.1}] \int x \operatorname{sen} x \, dx \ ; \quad [\mathbf{2.2}] \int \frac{e^{1/x}}{x^2} \, dx \ ; \quad [\mathbf{2.3}] \int \frac{1}{\operatorname{sen} 2x} \, dx;$$

Es 3 [Pt. 24] Calcolare i seguenti integrali definiti

$$[\mathbf{3.1}] \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}} \, dx \ ; \qquad [\mathbf{3.2}] \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x \, dx \ .$$

Es 4 [Pt. 8] Calcolare la lunghezza del grafico $\{(x, y) : \ y = \log x \text{ con } \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}\}$.

Es 5 [Pt. 9] Studiare la convergenza dell'integrale improprio: $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|\operatorname{sen} x| + x \log^2 x}}$.

Es 6 [Pt. 17] (i) Definire il campo complesso; definire la nozione di convergenza in $\mathbb{C}$; definire la funzione esponenziale complesso e dimostrare la formula di Eulero.
(ii) Trovare le soluzioni dell'equazione $|z|z^{10} = i$.

Es 7 [Pt. 17] (i) Dimostrare la formula di Taylor, nell'intorno di $x = 1$, al secondo ordine per una funzione $f \in C^3((0, \infty)$.
(ii) Calcolare il polinomio di Taylor al 10 ordine in $x = 0$ di $\log(1+x^8)+3x^6-\cosh x^3$.

Risposte

Es 1. Funzione dispari; $y = x \pm 5\pi$ asintoti obliqui; $x = \pm 3$ unici punti critici: -3 massimo locale, 3 minimo locale; 0 flesso; convessa per $x > 0$; concava per $x < 0$.

Es 2. [2.1]: $\operatorname{sen} x - x \cos x + c$. **[2.2]**: $-e^{1/x} + c$. **[2.3]**: $\frac{1}{2} \log|\tan x| + c$.

Es 3. [3.1]: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}} \, dx = \Big[\frac{x}{2}\sqrt{9+x^2} - \frac{9}{2}\log(x + \sqrt{9+x^2})\Big]_0^1 = \frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{9}{2}\Big(\log(1 + \sqrt{10}) + \log 3\Big)$.

[3.2]: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x \, dx = \frac{3}{16}\pi$.

Es 4. $\displaystyle\ell\{y = \log x : \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}\} = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \Big[\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\Big]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} = 1 + \frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$.

Es 5. Sia $f(x) = \sqrt{|\operatorname{sen} x| + x \log^2 x}$; $\lim_{x\to 0} f/\sqrt{|x|} = 1$ quindi $1/f$ è integrabile vicino a 0; $\lim_{x\to\infty} f/(x \log^2 x) = 1$, quindi $1/f$ è integrabile su $[1, \infty)$. Dunque $1/f$ è integrabile su $(0, \infty)$.

Es 6. (ii): $z = z_k = e^{it_k}$ con $t_k = \frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{5}$ e $k = 0, 1, ..., 9$.

Es 7. (ii): $\log(1 + x^8) + 3x^6 - \cosh x^3 = -1 + \frac{5}{2}x^6 + x^8 + O(x^{12})$.