Test in aula – 12/10/2007

N.B. • Il punteggio totale è in trentesimi; il punteggio di ogni singolo esercizio è indicato tra parentesi quadrate.
• È **vietato**: parlare, scambiarsi informazioni; consultare testi, appunti, etc. L'uso del cellulare, calcolatrici, etc.
• Le risposte vanno sempre motivate chiaramente; risposte senza giustificazioni non danno punteggio.

Es 1 [Pt. 12] Determinare i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che verificano le seguenti disuguaglianze:

1.1 $x^4 - 6x^2 + 8 < 0$

1.2 $\dfrac{|x| - 3}{x - 3} < 2$

Es 2 [Pt. 9] Trovare gli estremi inferiore e superiore dei seguenti insiemi e dire se si tratta di minimo o massimo:

2.1 $[0, 1] \cup (2, 5]$

2.2 $\{x \in \mathbb{Q} : \ x \in (-1, 1] \text{ e } x < \dfrac{1}{\sqrt{5}}\}$.

2.3 $\mathbb{N} \cup \{x = -\dfrac{1}{n} : \ n \ \in \mathbb{Z}_+\}$

Es 3 [Pt. 4] (i) Enunciare gli assiomi algebrici di $\mathbb{R}$ che riguardano la addizione.
(ii) Usando i soli assiomi di cui al punto (i), dimostrare che $a+b = 0$ implica che $b = -a$.

Es 4 [Pt. 5] Definire "insieme induttivo". Dare almeno tre esempi diversi. Definire $\mathbb{N}$ e discutere il "principio di induzione".

Es 5 [Pt. 5] Dimostrare che se a e b sono due numeri reali tali che $0 < a < b$, allora esiste sempre $r \in \mathbb{Q}$ tale che $a < r < b$.

Risposte.
Es1. 1.1: $\{\sqrt{2} < |x| < 2\} = (-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2)$. **1.2**: $\mathbb{R} \backslash \{3\}$.
Es2. 2.1: 0 (minimo); 5 (massimo). **2.2**: -1 (inf); $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (sup). **2.3**: -1 (min); non è limitato superiormente.