Test in aula – 2/11/2007

N.B. • *Il punteggio totale è in trentesimi; il punteggio di ogni singolo esercizio è indicato tra parentesi quadrate.*
• *È* **vietato***: parlare, scambiarsi informazioni; consultare testi, appunti, etc.; l'uso del cellulare, calcolatrici, etc.*
• *Le risposte vanno sempre motivate chiaramente e sinteticamente! Risposte senza giustificazioni non danno punteggio.*

Es 1 [**Pt. 6**] Calcolare i seguenti limiti

$$[\mathbf{1.1}]\ \lim_{n\to\infty} 3.3^n\ ; \qquad [\mathbf{1.2}]\ \lim_{n\to\infty} 3.3^{\frac{1}{2n}}\ ; \qquad [\mathbf{1.3}]\ \lim_{n\to\infty} (\sqrt{10})^{-n}\ ;$$

$$[\mathbf{1.4}]\ \lim_{n\to\infty} \log_2 \sqrt{10^{n!}}; \qquad [\mathbf{1.5}]\ \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n^{\sqrt{2}}}{n^{0.01}}\ .$$

Es 2 [**Pt. 8**] Calcolare, al variare di x, i seguenti limiti

$$[\mathbf{2.1}]\ \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n^x}\ , \qquad [\mathbf{2.2}]\ \lim_{n\to\infty} \frac{(xn)^5}{(n+\sqrt{2})^5}\ .$$

Es 3 [**Pt. 10**] Studiare il comportamento (al variare di x qualora appaia) delle seguenti serie

$$[\mathbf{3.1}]\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^5-1}\ , \qquad [\mathbf{3.2}]\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\log_2 n)^2}\ , \qquad [\mathbf{3.3}]\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{\sqrt{5n}-\sqrt{n}}\ .$$

Es 4 [**Pt. 4**] Dare la definizione di limite per una successione di numeri reali e trovare L ed N tale che $\left|\frac{n+1}{n+2} - L\right| < \frac{1}{1000}$, per ogni $n \ge N$.

Es 5 [**Pt. 4**] Dimostrare la formula per una somma geometrica di ragione $a \neq 1$ e calcolare $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} 10^{-n}$.

Es 6 [**Pt. 6**] (i) Definire $2^{2\sqrt{5}}$.
(ii) Dare uno schema della dimostrazione (max 4 righe) della formula $2^{x+y} = 2^x 2^y$ con $x, y \in \mathbb{R}$.

Risposte 1.1: ∞. **1.2**: 1. **1.3**: 0. **1.4**: ∞. **1.5**: 0.
2.1: 0 per $x \in (-1, 1]$, $+\infty$ altrimenti. **2.2**: x^5.
3.1: converge. **3.2**: per $|x| < 1$ converge assolutamente; per $x = -1$ converge (Leibniz); per $x \ge 1$ diverge; per $x < -1$ non converge. **3.3**: converge per $x < -1/2$, diverge altrimenti.
4: $L = 1$ e $N = 999$. **5**: $\frac{1}{9}(1 - 10^{-100})$.