Test in aula – 23/11/2007

N.B. • *Il punteggio totale è in centesimi; il punteggio di ogni singolo esercizio è indicato tra parentesi quadrate.*
• *È* **vietato***: parlare, scambiarsi informazioni; consultare testi, appunti, etc.; l'uso del cellulare, calcolatrici, etc.*
• *Le risposte vanno sempre motivate chiaramente e sinteticamente! Risposte senza giustificazioni non danno punteggio.*

Es 1 [Pt. 10] Calcolare i seguenti limiti

$$[\mathbf{1.1}]\ \lim_{n\to\infty} \log\Big(1+\frac{\operatorname{sen} n}{n}\Big)\ ;\quad [\mathbf{1.2}]\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\sqrt{10}}+(\operatorname{sen} n)^n}{2^n+n}\ ;\quad [\mathbf{1.3}]\ \lim_{n\to\infty} \cosh 2^{-1/n};$$

$$[\mathbf{1.4}]\ \lim_{n\to\infty} \frac{(1+10^{-10})^n}{(\log n)^{10^{10}}};\qquad [\mathbf{1.5}]\ \lim_{n\to\infty} \Big(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)^n .$$

Es 2 [Pt. 18] Calcolare i seguenti limiti (al variare di x qualora appaia)

$$[\mathbf{2.1}]\ \lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^{\log n}}{n^2}\ ;\qquad [\mathbf{2.2}]\ \lim_{n\to\infty} \frac{e^{xn}-1}{n^x}\ ;\quad [\mathbf{2.3}]\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2}-1}{n+1}$$

Es 3 [Pt. 18] Studiare il comportamento (al variare di x qualora appaia) delle seguenti serie

$$[\mathbf{3.1}]\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}})}{n^x}\ ,\qquad [\mathbf{3.2}]\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\ ,\qquad [\mathbf{3.3}]\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}\ .$$

Es 4 [Pt. 21] Calcolare i seguenti limiti

$$[\mathbf{4.1}]\ \lim_{x\to 0}(1+x)^x\ ,\qquad [\mathbf{4.2}]\ \lim_{x\to 0} \frac{\log(2^x+x)}{x}\ ,\qquad [\mathbf{4.3}]\ \lim_{x\to\pi/2} \frac{(\pi-2x)^2}{\cos x}\ .$$

Es 5 [Pt. 11] Dimostrare che se $\lim a_n = -\infty$ e $\{b_n\}$ è una successione limitata, allora $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = -\infty$.

Es 6 [Pt. 12] (i) Trovare n tale che $2^{n+1} > (2^{\sqrt{2}})^5 > 2^n$.
(ii) Dare uno schema della dimostrazione (max 2 righe) della formula $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.
(iii) Definire $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ e dimostrare che $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$

Es 7 [Pt. 10] Enunciare e dimostrare (max 4 righe) il teorema di Weierstrass sui massimi e mini di funzioni continue.

Risposte 1.1: 0. **1.2**: 0. **1.3**: $\cosh 1 = (e+e^{-1})/2$. **1.4**: ∞. **1.5**: 0.
2.1: 0. **2.2**: ∞, se $x>0$; 0, se $x=0$; $-\infty$, se $x<0$. **2.3**: 0.
3.1: converge se e solo se $x>0$ (confronto asintotico con $\sum 1/n^{x+1}$). **3.2**: converge (criterio rapporto).
3.3: converge (criterio di Cauchy o confronto con $\sum n^{-3/2}$).
4.1: 1. **4.2**: $1+\log 2$. **4.3**: 0.
12.1: $n=7$.