Primo Appello – 30/1/2009

N.B. • *Indicare in cima all'elaborato da consegnare: nome, cognome, data di nascita, n. matricola (o n. documento).*
• *Il punteggio totale è in centesimi; il punteggio di ogni singolo esercizio è indicato tra parentesi quadrate.*
• *È* **vietato***: parlare, scambiarsi informazioni; consultare testi, appunti, etc.; l'uso del cellulare, calcolatrici, etc.*
• *Le risposte vanno sempre motivate chiaramente e sinteticamente! Risposte senza giustificazioni non danno punteggio.*

Es 1 [Pt. 18] Calcolare i seguenti limiti

$$\textbf{(1.1)}\ \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{3}{n^2+n^4}\Big)^n\ ; \qquad \textbf{(1.2)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2})^n}{n^{\sqrt{n}}}\ ;$$

$$\textbf{(1.3)}\ \lim_{x\to 0+}|x|^{\frac{1}{x}}\ ; \quad \textbf{(1.4)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{e^x\,\mathrm{sen}\,(e^{-x}\,\mathrm{sen}\,x)}{x}\ .$$

Es 2 [Pt 12] Discutere la convergenza, al variare di α, delle serie

$$\textbf{(i)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^\alpha}\ ; \qquad \textbf{(ii)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha\,\mathrm{sen}\,2^{-n}\ .$$

Es 3 [Pt. 12] Studiare la funzione $x\to f(x)=x^2(\log x-1)$, tracciandone, in particolare il grafico, e trovandone (se esistono) il massimo e il minimo.

Es 4 [Pt. 24] (i) Calcolare i seguenti integrali: $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\mathrm{sen}^2 x}\ ,\qquad \int_1^2\frac{\log x}{x^3}\ .$

(ii) Discutere la convergenza dell'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1\frac{x\log x}{1-x}dx.$

Es 5 [Pt. 10] (i) Calcolare parte reale, parte immaginaria e modulo del numero complesso $z=\dfrac{2}{\sqrt{3}-i}+\dfrac{1}{i}$.

(ii) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione complessa: $z^3+i\bar{z}=0$.

Es 6 [Pt. 24] (i) Enunciare e dimostrare il criterio di Leibnitz per serie.
(ii) Dimostrare la formula di derivazione per l'arcoseno.
(iii) Dimostrare che una funzione continua e limitata su $[0,1)$ è ivi integrabile secondo Riemann.

Risposte
1.1: 1. **1.2:** ∞. **1.3:** 0. **1.4:** 0. **2 (i):** converge se e solo se $\alpha>1$. **2 (ii):** converge per ogni α.
3: il minimo è $-e/2$ per $x=\sqrt{e}$; l'etremo superiore è ∞; flesso in $x_f=1/\sqrt{e}$ (concava tra 0 e x_f e convessa per $x>x_f$); $f=0$ in 0 ed e.
4 (i): $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{Arctan}\,(\sqrt{2}\tan x)$; $\dfrac{3-2\log 2}{16}$. **4 (ii):** converge.
5.1: $z=(\sqrt{3}-i)/2$ quindi $\mathrm{Re}\,z=\sqrt{3}/2$ a $\mathrm{Im}\,z=-1/2$; $|z|=1$. **5.2:** 0 e $z_k=e^{it_k}$ con $t_k=k\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{8}$ con $0\le k\le 3$.