Complemento 1
Proprietà elementari di $\mathbb{N}$

In questo "complemento" vengono dimostrate alcune proprietà elementari di $\mathbb{N}$ usando esclusivamente gli assiomi che definiscono i numeri reali $\mathbb{R}$.

Si ricorda che un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ viene detto **induttivo** se:

(i) $1 \in I$

(ii) $x \in I \implies x + 1 \in I$.

Si ricorda anche che l'**insieme dei numeri naturali** $\mathbb{N}$ è, per definizione, il più piccolo insieme induttivo di $\mathbb{R}$, cioè:

$$\mathbb{N} := \{x \in \mathbb{R} : \ \forall \ I \subseteq \mathbb{R} \text{ induttivo}, x \in I\} \ .$$

Osservazione 1 (i) Dalla definizione di $\mathbb{N}$ segue immediatamente che *se $I \subseteq \mathbb{N}$ è induttivo allora $I = \mathbb{N}$.*

(ii) Esempi di insiemi induttivi sono $I_1 := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ e $I_2 := \{1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 2\}$. Dunque dalla definizione di $\mathbb{N}$ segue che $\mathbb{N} \subseteq I_1$ e $\mathbb{N} \subseteq I_2$. In particolare, $n \geq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e non ci sono interi tra 1 e 2: *se $x \in \mathbb{R}$ è tale che $1 < x < 2$ allora $x \notin \mathbb{N}$.*

Proposizione 2 ("Principio di induzione") *Siano $\mathcal{P}(n)$ proposizioni che dipendono da $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che $\mathcal{P}(1)$ sia vera e che se è vera $\mathcal{P}(n)$ per $n \geq 1$ allora $\mathcal{P}(n+1)$ è vera. Allora $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione Sia $I := \{n \in \mathbb{N} : \ \mathcal{P}(n) \ \text{ è vera}\}$. Dalle ipotesi segue che $I \subseteq \mathbb{N}$ è induttivo e quindi (per l'Osservazione 1–(i)) $I = \mathbb{N}$. ∎

Proposizione 3 *Siano n e m numeri naturali. Allora*

(a) $n + m \in \mathbb{N}$;

(b) $nm \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione Segue facilmente dagli assiomi algebrici di $\mathbb{R}$ usando l'induzione su $m \in \mathbb{N}$. ∎

Proposizione 4 *Se $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$ sono tali che $n < x < n+1$, allora $x \notin \mathbb{N}$.*

Dimostrazione Per induzione su n.

L'enunciato per $n = 1$ segue dall'Osservazione 1–(ii).

Assumiamo l'enunciato vero per n e supponiamo, per assurdo, che esista un intero $x \in \mathbb{N}$ tale che $n + 1 < x < n + 2$. Definiamo l'insieme $I := \mathbb{N} \backslash \{x\} = \{n \in \mathbb{N} : \ n \neq x\}$. Poiché $x > 1$, $1 \in I$. Sia $n \in I$. Allora $n \in \mathbb{N}$ e quindi $n+1 \in \mathbb{N}$. D'altra parte $n+1 \neq x$ (se fosse $n+1 = x$, seguirebbe che $x-1 \in \mathbb{N}$ e poiché $n + 1 < x < n + 2$ si ha che $n < x - 1 < n + 1$, ma per l'ipotesi induttiva $x - 1$ non può essere in $\mathbb{N}$ e si avrebbe una contraddizione). Quindi $n+1$ è in I, cioè I è induttivo, ma questo è assurdo poiché avremmo trovato un insieme induttivo strettamente contenuto in $\mathbb{N}$ il che contraddice la definizione di $\mathbb{N}$. La tesi segue dal principio di induzione (Proposizione 4). ∎

I seguenti risultati fanno uso, oltre che degli assiomi algebrici di $\mathbb{R}$ anche dell'assioma "trascendente" (esistenza dell'estremo superiore per insiemi non vuoti e superiormente limitati).

Proposizione 5 *Sia $A \subset \mathbb{N}$ non vuoto e limitato superiormente. Allora A ammette massimo cioè esiste $m \in A$ tale che $m \geq n$ per ogni $n \in A$.*

Dimostrazione Sia $m = \sup A$ (garantito dall'assioma dell'estremo superiore) e supponiamo, per assurdo, che $m \notin A$. Allora[1] esisterebbe $n \in A$ tale che $m - 1 < n < m$; analogamente esisterebbe un altro numero $k \in A$ tale che $n < k < m$. Ma allora $0 < k - n < 1$ cioè $n < k < n + 1$, il che è impossibile per la Proposizione 4. Dunque $m \in A$ e quindi m è il massimo di A. ∎

Proposizione 6 *Sia $A \subset \mathbb{N}$ non vuoto. Allora A ammette minimo cioè esiste $m \in A$ tale che $m \leq n$ per ogni $n \in A$.*

Dimostrazione Sia $B := \{k \in \mathbb{N} : \ k \leq n, \ \forall \ n \in A\}$. B è non vuoto poiché $1 \in B$; inoltre (essendo $A \neq \emptyset$) B è limitato superiormente (ogni elemento di A è un maggiorante per B). Per la Proposizione 5 esiste il massimo m di B. Tale m è anche un elemento di A (se così non fosse, poiché tra m e $m + 1$ non ci sono interi si avrebbe che se $n \in A$ allora $n \geq m + 1$, il che contraddice che m è il massimo di B) e quindi m è il minimo di A per definizione di B. ∎

Proposizione 7 *Siano $n > m$ numeri naturali. Allora $n - m \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione Poiché non ci sono interi tra n e $n + 1$ da $n > m$ segue che $n \geq m + 1$. Sia $A := \{h \in \mathbb{N} : \ m + h \leq n\}$. A è non vuoto ($1 \in A$) e $n - m$

[1] $s = \sup A$ se e solo se s è un maggiorante per A e per ogni $t < s$ esiste un elemento x di A tale che $t < x$.

è un maggiorante per A. Per la Proposizione 5 esiste il massimo $k \in A$. Allora $m + k = n$ (se così non fosse, se cioè $n > m + k$ allora $n \geq m + k + 1$ e quindi $k + 1$ sarebbe in A contraddicendo il fatto che k è il massimo di A). Dunque $k = n - m \in \mathbb{N}$. ∎

Proposizione 8 ("Proprietà archimedea") *Per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > x$.*

Dimostrazione Se $x < 1$ possiamo prendere $n = 1$. Sia ora $x \geq 1$ e consideriamo $A := \{m \in \mathbb{N} : \ m \leq x\}$. A è non vuoto ($1 \in A$ poiché $x \geq 1$) ed è limitato superiormente (da x). Per la Proposizione 5 esiste m massimo di A; tale numero soddisfa $m \leq x < m + 1$ (se fosse $m + 1 \leq x$, $m + 1$ apparterrebbe a B e m non ne sarebbe il massimo). La tesi segue con $n := m + 1$. ∎