Complemento 10

Numeri complessi

1. (Il campo complesso) Il campo complesso $\mathbb{C}$ è, per definizione, la terna $(\mathbb{R}^2, +, *)$, cioè $\mathbb{R}^2$ equipaggiato con due operazioni binarie, dette "somma e prodotto complesso", definite come segue:

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ (SC)
- $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$ (PC)

Gli elementi di $\mathbb{C}$ sono, dunque, semplicemente coppie ordinate di numeri reali $z = (x, y)$.

Osservazione 1 (i) Si noti che, mentre la somma "complessa" coincide con la somma (S) di $\mathbb{R}^2$ come spazio vettoriale (vedi **1**, Complemento 7), il "prodotto complesso" $*$ è assai diverso sia dal prodotto in (P) in **1**, Complemento 7, che dal prodotto scalare (51) (Complemento 7): esso infatti è una operazione binaria da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$: ad una coppia di vettori z_1 e z_2 in $\mathbb{R}^2$ associa un terzo vettore z in $\mathbb{R}^2$.

(ii) La somma in (SC) è (come già osservato nel Complemento 7) commutativa e associativa; l'elemento neutro è il vettore (o "numero complesso") $0 := (0, 0)$; l'opposto di $z = (x, y)$ è $-z := (-x, -y)$.

Proposizione 2 (i) *Il prodotto complesso è commutativo e associativo.*

(ii) *L'elemento neutro del prodotto complesso è* $1 := (1, 0)$.

(iii) *Se* $z = (x, y) \neq 0$ *il reciproco di* z*, denotato* z^{-1} *o* $1/z$ *è dato da*

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) .$$

(iv) *Vale la proprietà distributiva:*

$$z_1 * (z_2 + z_3) = z_1 * z_2 + z_1 * z_3 , \qquad \forall z_i \in \mathbb{R}^2 . \tag{1}$$

Dimostrazione (i) La commutatività è ovvia. Per l'associatività dobbiamo verificare che

$$(x_1, y_1) * \Big((x_2, y_2) * (x_3, y_3) \Big) = \Big((x_1, y_1) * (x_2, y_2) \Big) * (x_3, y_3) , \tag{2}$$

o anche, in vista della commutatività di $*$,

$$(x_1, y_1) * \Big((x_2, y_2) * (x_3, y_3) \Big) = (x_3, y_3) * \Big((x_2, y_2) * (x_1, y_1) \Big) . \tag{3}$$

D'altra parte, dalla definizione di * si ha che

$$\Big((x_1,y_1)*(x_2,y_2)\Big)*(x_3,y_3) = (x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+y_1x_2)*(x_3,y_3)$$
$$= (x_1x_2x_3 - y_1y_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3\,,\, x_1x_2y_3 - y_1y_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3)\ ,$$

che è simmetrica in 1 e 3 (ossia scambiando gli indici 1 e 3 tra loro otteniamo lo stesso risultato) e dunque (3) (e quindi (2)) è verificata.

(ii), (iii) e (iv) sono semplici verifiche dirette che seguono immediatamente dalla definizione di $*$. ∎

Osservazione 3 (i) Un campo $(X,+,\cdot)$ è un insieme X dotato di due operazioni binarie "+" e "·" tali che $(X,+)$ è un gruppo commutativo[1]; $(X\backslash\{0\},\cdot)$ (dove 0 è l'elemento neutro di +) è un gruppo commutativo[2]; vale la proprietà distributiva.
Esempi di campi sono $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

(ii) $(0,1)^2 := (0,1)*(0,1) = (-1,0) = -(1,0) = -1$. Il numero complesso $(0,1)$ prende il nome di *unità immaginaria*. L'esistenza di tale elemento è alla base della definizione di campo complesso.

2 ($\mathbb{R}$ come sottoinsieme di $\mathbb{C}$) Sia

$$j : x \in \mathbb{R} \to j(x) := (x,0) \in \mathbb{C}\ . \tag{4}$$

La funzione j, come è immediato verificare, è un isomorfismo di $\mathbb{R}$ su $j(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{C}$, cioè j è iniettiva e conserva la somma e il prodotto con i rispettivi elementi neutri:

$$j(x+y) = j(x)+j(y)\ ,\ j(xy) = j(x)*j(y)\ ,\ j(0) = 0 := (0,0)\ ,\ j(1) = 1 := (1,0)\ . \tag{5}$$

Tale isomorfismo permette di *identificare* $\mathbb{R}$ con $j(\mathbb{R})$ identificando $x \in \mathbb{R}$ con $j(x) \in \mathbb{C}$. Tele identificazione è consistente con le notazioni $0 = (0,0)$ e $1 = (1,0)$ per le unità additive e moltiplicative di $\mathbb{C}$.

Possiamo, ora, introdurre la **notazione classica**. Innanzitutto il prodotto $z_1 * z_2$ verrà denotato (analogamente a quanto si fa in $\mathbb{R}$) semplicemente con z_1z_2:

$$z_1z_2 := z_1 * z_2\ , \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}\ ; \tag{6}$$

analogamente le *potenze* verrranno denotate z^n:

$$z^n := \underbrace{z * \cdots * z}_{n \text{ volte}}\ , \qquad z \in \mathbb{C}\ ; \tag{7}$$

[1]Ossia, per ogni $x,y,z \in X$ vale: $x+y=y+x$; $x+(y+z)=(x+y)+z$; $\exists\ 0 \in X$ tale che $x+0=0+x=x$ per ogni $x \in X$; per ogni x esiste $-x \in X$ tale che $x+(-x)=0$.

[2]Ossia, per ogni $x,y,z \in X$ vale: $x\cdot y = y\cdot x$; $x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$; $\exists\ 1 \in X$ tale che $x\cdot 1 = 1\cdot x = x$ per ogni $x \in X$; per ogni x esiste $x^{-1} \in X$ tale che $x\cdot x^{-1} = 1$.

e l'unità immaginaria $(0,1)$ verrà denotata con $i := (0,1)$:

$$0 := (0,0)\ , \qquad 1 := (1,0)\ , \qquad i := (0,1)\ . \tag{8}$$

Dunque, tramite l'identificazione di $\mathbb{R}$ con $j(\mathbb{R})$, scriveremo ogni numero complesso $z = (x,y)$ come

$$z = x + iy =: j(x) + (0,1) * j(y) = (x,y)\ . \tag{9}$$

3 (Complesso coniugato e modulo) Se $z = x+iy \in \mathbb{C}$ denotiamo con $\bar z \in \mathbb{C}$ il suo *complesso coniugato* definito come

$$\bar z = x - iy = (x,-y)\ ; \tag{10}$$

il *modulo* di z è per definizione il numero non negativo

$$|z| := \sqrt{x^2+y^2}\ . \tag{11}$$

In vista dell'identificazione fatta, abbiamo[3]

$$z\bar z = |z|^2\ . \tag{12}$$

Se $z_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}$,

$$\bar z_1 \bar z_2 = (x_1 - iy_i)(x_2 - iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + y_1x_2) = \overline{z_1 z_2}\ , \tag{13}$$

e, da (12),

$$|z_1z_2| = \sqrt{(z_1z_2)\overline{(z_1z_2)}} = \sqrt{|z_1|^2|z_2|^2} = |z_1|\ |z_2|\ . \tag{14}$$

Dunque *il prodotto complesso conserva sia il complesso coniugato che il modulo.*

Definizione 4 *Dato $z = x+iy$ chiameremo x la* **parte reale** *di z e y* **la parte immaginaria** *di z e scriveremo:*

$$x := \mathrm{Re}\,(x+iy)\ , \qquad y = \mathrm{Im}\,(x+iy)\ . \tag{15}$$

Dalla definizione di complesso coniugato seguono immediatamente le relazioni

$$\mathrm{Re}\,(z) = \frac{z+\bar z}{2}\ , \qquad \mathrm{Im}\,(z) = \frac{z-\bar z}{2i}\ . \tag{16}$$

4 (Numeri complessi e coordinate polari) Usando le coordinate polari in $\mathbb{R}^2$, si ha che

$$x + iy := (x,y) = r(\cos t + i \,\mathrm{sen}\, t) := r(\cos t,\, \mathrm{sen}\, t)$$

[3]Nella notazione introdotta all'inizio, avremmo $z * \bar z = (x,y) * (x,-y) = (x^2+y^2, 0)$.

dove r è il modulo di z e $t := \mathrm{Arg}(z)$ è *l'argomento principale di* z:

$$r := |z|^{1/2} = \sqrt{x^2 + y^2} \ , \qquad t = \mathrm{Arg}(z) \in [0, 2\pi) \ . \tag{17}$$

Il prodotto complesso ha una forma particolarmente semplice in coordinate polari: se $z_j = x_j + iy_j = r_j(\cos t_j + i \,\mathrm{sen}\, t_j) \in \mathbb{C}$, si ha

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos t_1 + i \,\mathrm{sen}\, t_1)(\cos t_2 + i \,\mathrm{sen}\, t_2) \\ &= r_1 r_2 \Big((\cos t_1 \cos t_2 - \mathrm{sen}\, t_1 \,\mathrm{sen}\, t_2) + i(\cos t_1 \,\mathrm{sen}\, t_2 + \mathrm{sen}\, t_1 \cos t_2) \Big) \\ &= r_1 r_2 \Big(\cos(t_1 + t_2) + \mathrm{sen}\,(t_1 + t_2) \Big) \ ; \end{aligned} \tag{18}$$

dunque

$$|z_1 z_2| = |z_1| \ |z_2| \ , \qquad \arg(z_1 z_2) = \mathrm{Arg} z_1 + \mathrm{Arg}(z_2) \ , \tag{19}$$

dove[4] $\arg(z_1 z_2) := \mathrm{Arg}(z_1 z_2) + 2\pi k$ con $k = [(t_1 + t_2)/2\pi)]$.

infine, il complesso coniugato corrisponde a cambiare segno all'argomento di z:

$$\begin{aligned} \bar{z} &:= \overline{x + iy} = \overline{r \cos t + ir \,\mathrm{sen}\, t} = r \cos t - ir \,\mathrm{sen}\, t \\ &= r \Big(\cos(-t) + i \,\mathrm{sen}\,(-t) \Big) \ . \end{aligned} \tag{20}$$

5 (Successioni e serie complesse) La convergenza in $\mathbb{C}$ è una semplice generalizzazione della convergenza in $\mathbb{R}$.

Definizione 5 *Una successione di numeri complessi* $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ *converge a* $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$*, e scriveremo*

$$z_0 = \lim_{n \to \infty} z_n \qquad (\text{oppure} \ \ z_n \to z_0), \tag{21}$$

se e solo se

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ , \quad \exists \ N \in \mathbb{Z}_+ \ \text{tale che} \quad |z_n - z_0| < \varepsilon \ , \ \forall \ n \geq N \ . \tag{22}$$

Osservazione 6 Poiché

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \geq \max\{|x_n - x_0| \ , \ |y_n - y_0|\}$$

si ha che $z_n \to z_0$ implica che le due successioni reali $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ convergono rispettivamente a x_0 e y_0; viceversa se $x_n \to x_0$ e $y_0 \to y_0$, dai noti teoremi sui limiti di successioni in $\mathbb{R}$, segue che la successione $\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \to 0$, cioè $z_n \to z_0$. Dunque *dire che* $z_n \to z_0$ *è equivalente a dire che* $\mathrm{Re}\,(z_n) \to \mathrm{Re}\,(z_0)$ *e* $\mathrm{Im}\,(z_n) \to \mathrm{Im}\,(z_0)$.

[4] In generale $\arg(z) = \mathrm{Arg(z)} + 2\pi k$ per un qualche intero $k \in \mathbb{Z}$.

Esempio 1. Consideriamo la successione $z_n = a^n$ con $a \in \mathbb{C}$. Se $|a| < 1$ e $x_n + iy_n := z_n = a^n$, allora

$$\max\{|x_n|\,,\,|y_n|\} \le |a^n| = |a|^n \to 0\ ,$$

dunque, in tal caso $\lim a^n = 0$. Se $a = 1$, $a^n = 1$. Se $|a| > 1$ allora $\lim |a^n| = \lim |a|^n = \infty$ e quindi a^n non converge. Anche nel caso in cui $a \in S^1 \backslash \{1\}$ si può dimostrare che z_n non converge.

Analogamente si trattano le **serie complesse**: dire che la serie $\sum z_k$ converge equivale a dire che la successione

$$\sum_{k=0}^{n} z_k$$

converge e quindi, per quanto visto prima, equivale a dire che le due serie reali $\sum x_k$ e $\sum y_k$ convergono, dove $x_k + iy_k = z_k$. In particolare, diremo che una serie $\sum z_k$ *converge assolutamente* se converge la serie a termini positivi $\sum |z_k|$, in qual caso converge la serie[5] $\sum z_k$. Come nel caso reale il simbolo $\sum z_k$ ha una certa ambiguità poiché denota sia la successione $\{\sum_{k=0}^n z_k\}$ sia, qualora la successione sia convergente, il suo limite. Infine, nel caso di assoluta convergenza (come nel caso reale), si ha

$$\Big|\sum_{k=0}^{\infty} z_k\Big| \le \sum_{k=0}^{\infty} |z_k|\ . \tag{23}$$

Esempio 2 (La serie geometrica). Sia

$$w_n := \sum_{k=0}^{n} a^k\ . \tag{24}$$

Come nel caso reale, otteniamo

$$(1-a)w_n = w_n - aw_n = \sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=1}^{n+1} a^k = 1 - a^{n+1}$$

e dunque, se $a \neq 1$, si ha

$$w_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \tag{25}$$

e, in vista dell'Esempio 1, se $|a| < 1$, otteniamo la formula nota nel caso reale della serie geometrica di ragione a:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}\ , \qquad (a \in \mathbb{C}\ ,\ |a| < 1). \tag{26}$$

[5]Infatti, sia $\sum_{k=0}^n |x_k|$ che $\sum_{k=0}^n |y_k|$ sono maggiorate da $\sum_{k=0}^n |z_k|$ e dunque se $\sum z_k$ converge assolutamente, convergono assolutamente anche le serie $\sum x_k$ e $\sum y_k$ e quindi le serie $\sum x_k$ e $\sum y_k$ convergeranno a due numeri reali x_0 e y_0 cosicché $\sum z_k = x_0 + iy_0$.

6 (La serie esponenziale in $\mathbb{C}$) La serie

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \tag{27}$$

converge assolutamente e

$$|\exp(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} = e^{|z|} \ . \tag{28}$$

Tale serie prende il nome di **funzione esponenziale** complessa ed è forse la funzione più "importante" della analisi matematica.

Osserviamo che se $t \in \mathbb{R}$, allora

$$\begin{aligned}
\exp(it) \quad &:= \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(it)^k}{k!} \\
&= \quad \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it)^{2k+1}}{(2k+1)!} \Big) \\
&= \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{i^{2k} t^{2k}}{(2k)!} + \lim_{n\to\infty} i \sum_{k=0}^{n-1} \frac{i^{2k} t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \lim_{n\to\infty} i \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \quad \cos t + i \operatorname{sen} t \ ,
\end{aligned}$$

tale formula, ossia

$$\exp(it) = \cos t + i \operatorname{sen} t \ , \qquad (t \in \mathbb{R}) \ , \tag{29}$$

prende il nome di **formula di Eulero**.

La funzione $\exp(z)$ sui reali (ossia per $z \in \mathbb{R}$) coincide con e^z e dunque se x e y sono reali si ha che $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$. Tale relazione vale anche nel caso complesso.

Teorema 7 ("Teorema di addizione per l'esponenziale complesso")

$$\exp(z+w) = \exp(z) \ \exp(w) \ , \qquad \forall \ z, w \in \mathbb{C} \ . \tag{30}$$

Dimostrazione Dalla formula del binomio di Newton (che vale inalterata in $\mathbb{C}$)

$$\begin{aligned}
\exp(z+w) &:= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(z+w)^k}{k!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} z^j w^{k-j} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \frac{z^j}{j!} \frac{w^{k-j}}{(k-j)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{0\le j\le k\le n} \frac{z^j}{j!} \frac{w^{k-j}}{(k-j)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{z^j}{j!} \frac{w^{k-j}}{(k-j)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!} \sum_{k=0}^{n-j} \frac{w^k}{k!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!} \sum_{k=0}^{n} \frac{w^k}{k!} - \varepsilon_n \Big)
\end{aligned}$$

dove

$$\varepsilon_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{z^j}{j!} \sum_{k=n-j+1}^{n} \frac{w^k}{k!} \ . \tag{31}$$

Poiché

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!} \sum_{k=0}^{n} \frac{w^k}{k!} = \Big(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!} \Big) \Big(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{w^k}{k!} \Big) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} = \exp(z)\exp(w) \ ,$$

il teorema è conseguenza dell'identità

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0 \ . \tag{32}$$

Per dimostrare la (32), osserviamo dapprima che

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(1+1)^n}{(n+1)!} = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{j!} \frac{1}{(n+1-j)!} \ ;$$

dunque per ogni coppia di interi non negativi la cui somma è $(n+1)$ si ha

$$\frac{1}{j!}\frac{1}{k!} \le \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \ , \qquad \forall\ j,k\in\mathbb{N} \text{ tali che } k+j=n+1 \ . \tag{33}$$

Ora, se $R \geq \max\{|z|, |w|\}$, dalla (33), osservando che $j + k = n + 1$ nel termine di destra della (31), si ha che

$$|\varepsilon_n| \leq R^{n+1} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=n-j+1}^{n} \frac{1}{j!} \frac{1}{k!} \leq \frac{(2R)^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=n-j+1}^{n} 1 \leq \frac{(2R)^{n+1}}{(n+1)!} n^2 ,$$

che, per n che tende a ∞, tende a zero. ∎

Osservazione 8 (i) Poiché la funzione $\exp(z)$ estende al campo complesso la funzione $x \in \mathbb{R} \to e^x$ (estendendo anche la relazione (30) a tutto $\mathbb{C}$), si pone

$$e^z := \exp(z) , \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} . \tag{34}$$

(ii) Grazie al teorema di addizione e alla formula di Eulero si ha, per ogni $z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \tag{35}$$

e dunque

$$\operatorname{Re}(e^z) = e^x \cos y , \qquad \operatorname{Im}(e^z) = e^x \operatorname{sen} y . \tag{36}$$

(iii) Dalla formula di Eulero e dal teorema di addizione segue immediatamente che se s e t sono reali, allora

$$\begin{aligned}
\cos(t+s) + i \operatorname{sen}(t+s) &= e^{i(t+s)} \\
&= e^{it} e^{is} \\
&= (\cos t + i \operatorname{sen} t)(\cos s + i \operatorname{sen} s) \\
&= (\cos t \cos s - \operatorname{sen} t \operatorname{sen} s) + i(\operatorname{sen} t \cos s + \cos t \operatorname{sen} s) ,
\end{aligned}$$

relazione che fornisce una nuova prova delle formule di addizione per il seno ed il coseno.