Complemento 2
Un teorema sulle successioni

Teorema 1 *Sia $\{a_n\}$ una successione con $a_n > 0$ e tale che esista il limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \ , \tag{1}$$

(il caso $L = \infty$ è ammesso). Allora si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \ . \tag{2}$$

Dimostrazione Dalle ipotesi segue che $L \geq 0$ oppure $L = \infty$. Consideriamo prima il caso $\infty > L > 0$. Fissiamo $0 < \varepsilon < L/2$. Da (1) segue che esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \frac{\varepsilon}{2} \ , \qquad \forall\ n \geq N \ . \tag{3}$$

Iterando tale relazione[1] si ottiene che

$$\Big(L - \frac{\varepsilon}{2}\Big)^{n-N} a_N < a_n < a_N \Big(L + \frac{\varepsilon}{2}\Big)^{n-N} \ , \qquad \forall\ n \geq N+1$$

che possiamo riscrivere come

$$\Big(L - \frac{\varepsilon}{2}\Big)^{n} \frac{a_N}{(L-\varepsilon/2)^N} < a_n < \frac{a_N}{(L+\varepsilon/2)^N} \Big(L + \frac{\varepsilon}{2}\Big)^{n} \ , \qquad \forall\ n \geq N+1$$

e poiché $1/L < 1/(L-\varepsilon/2)$ e $1/(L+\varepsilon/2) < 1/L$ otteniamo

$$\Big(L - \frac{\varepsilon}{2}\Big)^{n} b < a_n < b\ \Big(L + \frac{\varepsilon}{2}\Big)^{n} \ , \qquad \forall\ n \geq N+1$$

con $b = b(N) := a_N/L^N$ ed, infine,

$$\Big(L - \frac{\varepsilon}{2}\Big) b^{1/n} < a_n^{1/n} < b^{1/n} \Big(L + \frac{\varepsilon}{2}\Big) \ , \qquad \forall\ n \geq N+1 \ . \tag{4}$$

Ora, poiché $\lim b^{1/n} = 1$, esiste M, che possiamo assumere maggiore o uguale ad $N+1$, tale che, con $\beta := (2\varepsilon)/(5L)$, si abbia

$$1 - \beta < b^{1/n} < 1 + \beta, \qquad \forall\ n \geq M \ . \tag{5}$$

Ricordando che $\varepsilon < L/2$ è facile verificare che

$$L - \varepsilon < (L - \varepsilon/2)(1-\beta) \ , \qquad \text{e} \qquad (L+\varepsilon/2)(1+\beta) < L + \varepsilon \ . \tag{6}$$

[1] Per esempio, $\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, etc.

Ma allora, per ogni $n \geq M$ da (4), (5) e (6) segue che

$$L - \varepsilon < a_n^{1/n} < L + \varepsilon \qquad \forall\, n \geq M\ ,$$

ossia $\lim a_n^{1/n} = L$.

Consideriamo ora il caso $L = 0$. Fissiamo $0 < \varepsilon < 1$ e sia $\alpha := (\varepsilon/2)^2$. Dalle ipotesi segue che esiste $N > 1$ tale che

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha\ , \qquad \forall\, n \geq N\ ,$$

e, iterando,

$$0 < a_n < a_N \alpha^{n-N}\ , \qquad \forall\, n \geq N + 1$$

ossia

$$0 < a_n^{1/n} < a_N^{1/n} \alpha^{1-N/n}\ , \qquad \forall\, n \geq N + 1\ . \tag{7}$$

Ora se $n \geq 2N > N$ segue che $(1 - N/n) \geq 1/2$ e quindi (essendo $\alpha < 1$) $\alpha^{1-N/n} \leq \alpha^{1/2} = \varepsilon/2$. Quindi, per (7),

$$0 < a_n^{1/n} < a_N^{1/n} \frac{\varepsilon}{2}\ , \qquad \forall\, n \geq 2N\ . \tag{8}$$

Poiché $a_N^{1/n} \to 1$, esiste M, che possiamo assumere maggiore od uguale a $2N$, tale che $a_N^{1/n} < 2$ per ogni $n \geq M$ e da (8) segue, quindi, che $0 < a_N^{1/n} < \varepsilon$ per ogni $n \geq M$, ossia $\lim a_n^{1/n} = 0$.

Il caso $L = \infty$ si tratta in maniera analoga e viene lasciato per esercizio. ∎