

## Complemento 3

### Sottosuccessioni. Massimo e minimo limite

**Definizione 1** Una sottosuccessione (o successione estratta) di una successione  $\{a_n\}$  è una successione  $\{b_k\}$  formata da elementi  $b_k = a_{n_k}$  per una qualche successione  $\{n_k\}$  strettamente crescente e a valori in  $\mathbb{N}$ .

**Lemma 2** Sia  $\{a_n\}$  una successione non limitata superiormente<sup>1</sup>. Allora esiste una sottosuccessione  $\{a_{n_k}\}$  di  $\{a_n\}$  strettamente crescente e tale che  $\lim a_{n_k} = \infty$ .

**Dimostrazione** Definiamo la successione  $\{n_k\}$  in modo ricorsivo. Sia  $n_1 \in \mathbb{N}$  tale che  $a_{n_1} > 1$ . Poniamo  $a_{n_0} := 0$  e assumiamo di aver definito  $n_1 < n_2 < \dots < n_k$  in modo tale che

$$a_{n_j} > \max\{a_{n_{j-1}}, j\}, \quad \forall 1 \leq j \leq k.$$

Poiché la successione  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  non è limitata superiormente, non è limitata superiormente neanche la successione  $\{a_n\}_{n > n_k}$  e dunque esiste un  $n_{k+1} > n_k$  tale che  $a_{n_{k+1}} > \max\{a_{n_k}, k\}$ . La sottosuccessione  $\{a_{n_k}\}$  ha le proprietà richieste. ■

**Lemma 3** Se  $\{a_n\}$  ammette limite (incluso  $\pm\infty$ ) allora qualunque sottosuccessione  $\{a_{n_k}\}$  ha lo stesso limite.

**Dimostrazione** Se  $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$  dalle definizioni di limite segue che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che  $|a_n - a| < \varepsilon$  per ogni  $n \geq N$ . Se  $\{a_{n_k}\}$  è una sottosuccessione di  $\{a_n\}$  allora  $\lim a_{n_k} = a$  e quindi esiste un  $k_0 \in \mathbb{N}$  tale che  $n_k > N$  per ogni  $k \geq k_0$  e dunque se  $k \geq k_0$  si avrà che  $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$  e quindi  $\lim a_{n_k} = a$ . Se  $a_n \rightarrow \infty$ , dato  $M$  esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che  $a_n > M$  per ogni  $n \geq N$  e, come prima, si trova un  $k_0$  tale che  $n_k > N$  per ogni  $k \geq k_0$  cosicché, per tali  $k$ ,  $a_{n_k} > M$  mostrando che  $\lim a_{n_k} = \infty$ ; il caso  $\lim a_n = -\infty$  si tratta in modo analogo. ■

Sia  $\{a_n\}$  una successione limitata superiormente e si consideri la successione

$$\bar{a}_k := \sup\{a_n : n \geq k\} = \sup_{n \geq k} a_n. \quad (1)$$

<sup>1</sup>Ossia, l'insieme dei valori di  $\{a_n\}$  non è limitato superiormente:  $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \infty$  (che è anche equivalente a dire che per ogni  $M \exists n \in \mathbb{N}$  tale che  $a_n > M$ ).

Poiché l'insieme  $\{n \geq k+1\} \subset \{n \geq k\}$  si ha che tale successione è monotona decrescente e dunque esiste il limite che coincide con l'estremo inferiore dei valori della successione (che può anche essere  $-\infty$ ) :

$$\inf \bar{a}_k = \lim \bar{a}_k . \quad (2)$$

Analogamente se  $\{a_n\}$  è limitata inferiormente la successione

$$\underline{a}_k := \inf\{a_n : n \geq k\} = \inf_{n \geq k} a_n , \quad (3)$$

è monotona crescente e si ha che

$$\sup \underline{a}_k = \lim \underline{a}_k , \quad (4)$$

(e tale valore può essere  $+\infty$ ).

**Definizione 4** Se  $\{a_n\}$  è una successione si definisce il suo massimo limite (o limite superiore) come

$$\limsup a_n := \overline{\lim} a_n := \begin{cases} +\infty & \text{se } \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \infty \\ \lim \bar{a}_k = \inf \bar{a}_k & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove  $\bar{a}_k$  è definito in (1). Analogamente, si definisce il minimo limite (o limite inferiore) di  $\{a_n\}$  come

$$\liminf a_n := \underline{\lim} a_n := \begin{cases} -\infty & \text{se } \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = -\infty \\ \lim \underline{a}_k = \sup \underline{a}_k & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove  $\underline{a}_k$  è definito in (3).

**Osservazione 5** (i) Da tale definizione segue immediatamente che

$$\underline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} a_n \quad (5)$$

e, più sotto, vedremo che vale il segno di uguaglianza se e solo la successione  $\{a_n\}$  ha limite.

(ii) Se  $a_n \leq b_n$  allora

$$\underline{\lim} a_n \leq \underline{\lim} b_n , \quad \overline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} b_n \quad (6)$$

in particolare se  $\{a_n\}$  è limitata, ossia se, per due numeri reali  $c \leq C$  si ha che  $c \leq a_n \leq C$  per ogni  $n$ , allora

$$c \leq \underline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} a_n \leq C . \quad (7)$$

(iii) Se  $\{a_n\}$  è limitata superiormente allora  $\overline{\lim} a_n < \infty$  ma può accadere che  $\overline{\lim} a_n = -\infty$  (come si verifica immediatamente nel caso  $a_n = -n$ ). In effetti,

$\overline{\lim} a_n = -\infty$  se e solo se  $\lim a_n = -\infty$ .

**Dimostrazione** Se  $\overline{\lim} a_n = -\infty$  allora  $\inf \bar{a}_n = -\infty$  quindi per ogni  $M$  esiste  $n$  tale  $\bar{a}_n < M$  ma allora  $a_k \leq \bar{a}_n < M$  per ogni  $k \geq n$ , il che vuol dire che  $\lim a_k = -\infty$ . Viceversa, se  $\lim a_n = -\infty$  allora per ogni  $M$  esiste  $n$  tale che per ogni  $k \geq n$ ,  $a_k < M$  e quindi (prendendo l'estremo superiore per  $k \geq n$ )  $\bar{a}_n \leq M$  il che vuol dire che  $\lim \bar{a}_n = -\infty$  ossia  $\overline{\lim} a_n = -\infty$ . ■

Analogamente,

$\underline{\lim} a_n = +\infty$  se e solo se  $\lim a_n = \infty$ .

**Lemma 6** Sia  $\{a_n\}$  una successione tale che  $\overline{\lim} a_n = M \in \mathbb{R}$ . Allora per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che

$$a_k < M + \varepsilon, \quad \forall k \geq n. \quad (8)$$

Analogamente se  $\underline{\lim} a_n = m \in \mathbb{R}$ . Allora per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che

$$a_k > m - \varepsilon, \quad \forall k \geq n. \quad (9)$$

**Dimostrazione**<sup>2</sup> Poiché  $M = \inf \bar{a}_n$ , segue che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $M \leq \bar{a}_n < M + \varepsilon$ . Quindi, per ogni  $k \geq n$  (per definizione di  $\bar{a}_n$ ) si ha che  $a_k \leq \bar{a}_n < M + \varepsilon$ . ■

**Teorema 7** Sia  $\{a_n\}$  una successione.

(i) Esistono sottosuccessioni di  $\{a_n\}$ ,  $\{a_{n_k}\}$  e  $\{a_{m_k}\}$ , tali che

$$\lim a_{n_k} = \overline{\lim} a_n, \quad \lim a_{m_k} = \underline{\lim} a_n. \quad (10)$$

(ii) Se  $\{a_{n_k}\}$  è una sottosuccessione di  $\{a_n\}$  che ammette limite (eventualmente  $\pm\infty$ ) allora

$$\underline{\lim} a_n \leq \lim a_{n_k} \leq \overline{\lim} a_n. \quad (11)$$

(iii)  $\{a_n\}$  ammette limite (eventualmente  $\pm\infty$ ) se e solo se  $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$ .

**Dimostrazione** (i) Dimostriamo la prima disuguaglianza in (10); la seconda si tratta in modo del tutto analogo.

Assumiamo, dapprima, che  $\overline{\lim} a_n = M \in \mathbb{R}$ . Sia  $j \in \mathbb{N}$ . Poiché<sup>3</sup>

$$M = \inf \bar{a}_n = \lim \bar{a}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{a}_{j+n},$$

<sup>2</sup>Dimostriamo solo l'affermazione relativa al massimo limite; quella relativa al minimo limite si dimostra in modo del tutto analogo.

<sup>3</sup>La terza uguaglianza segue dal Lemma 3 e dal fatto che (fissato  $j$ )  $\bar{a}_{j+n}$  è una sottosuccessione di  $\bar{a}_n$ .

per ogni  $j \in \mathbb{N}$  esiste un intero  $p > j$  tale che

$$M - \frac{1}{2j} < M \leq \bar{a}_p < M + \frac{1}{2j} ; \quad (12)$$

e dalla definizione di  $\bar{a}_p$  segue che esiste  $p_j \geq p > j$  tale che

$$\bar{a}_p - \frac{1}{2j} < a_{p_j} .$$

Ma allora

$$M - \frac{1}{j} < a_{p_j} \leq \bar{a}_p < M + \frac{1}{2j}$$

e quindi  $\lim a_{p_j} = M$ . Dal Lemma 2 applicato alla successione  $\{p_j\}$  segue che esiste una sottosuccessione  $\{p_{j_k}\}$  di  $\{p_j\}$  strettamente crescente con limite  $+\infty$  e, in conclusione, otteniamo la tesi ponendo  $n_k := p_{j_k}$ .

Nel caso  $\overline{\lim} a_n = \infty$  la tesi segue dal Lemma 2.

Se  $\overline{\lim} a_n = -\infty$  allora (Osservazione 5, punto (iii))  $\lim a_n = -\infty$  (e la tesi vale con  $n_k = k$ ).

(ii) Dimostriamo che se  $\{a_{n_k}\}$  è una sottosuccessione di  $\{a_n\}$  che ha limite allora

$$\lim a_{n_k} \leq \overline{\lim} a_n ; \quad (13)$$

la dimostrazione per il limite inferiore è del tutto analoga.

Se  $\overline{\lim} a_n = \infty$  o se  $\lim a_{n_k} = -\infty$  la disuguaglianza (13) è evidentemente soddisfatta. Supponiamo ora che  $\overline{\lim} a_n < \infty$  e che  $\lim a_{n_k} = a > -\infty$ . Fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Dal Lemma 6 segue che esiste  $k_1$  tale che

$$a_k < M + \varepsilon , \quad \forall k \geq k_1 , \quad (14)$$

e, quindi, se  $k_2$  è tale che  $n_k \geq k_1$  per ogni  $k \geq k_2$  si ha che

$$a_{n_k} < M + \varepsilon , \quad \forall k \geq k_2 ,$$

e, prendendo il limite per  $k \rightarrow \infty$  in tale relazione si ottiene che  $a \leq M + \varepsilon$ , che, per l'arbitrarietà di<sup>4</sup>  $\varepsilon$ , implica che  $a \leq M$ , ossia la (13).

(iii) Se  $\lim a_n = \infty$ ,  $\overline{\lim} a_n = \infty$  (per definizione) e  $\underline{\lim} a_n = +\infty$  per l'Osservazione 5, (iii). Stesso ragionamento se  $\lim a_n = -\infty$ .

Viceversa se  $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = +\infty$  allora  $\lim a_n = +\infty$  (sempre Osservazione 5, (iii)). Stesso ragionamento se  $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = -\infty$ .

Passiamo al caso in cui  $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$ . Sia  $\varepsilon > 0$  e sia  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $-\varepsilon < a_k - a < \varepsilon$  per ogni  $k \geq n$ . Prendendo l'estremo superiore su  $k \geq n$  in tale relazione, otteniamo  $a - \varepsilon \leq \bar{a}_n \leq a + \varepsilon$ . Prendendo il limite per  $n \rightarrow \infty$  in

<sup>4</sup>Se  $a$  e  $b$  sono numeri reali tali che per ogni  $\varepsilon > 0$ ,  $a \leq b + \varepsilon$  allora  $a \leq b$ ; analogamente se  $a \geq b - \varepsilon$  per ogni  $\varepsilon > 0$  allora  $a \geq b$  (esercizio).

quest'ultima relazione otteniamo  $a - \varepsilon \leq \overline{\lim} a_n \leq a + \varepsilon$ , che per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$  implica che  $\overline{\lim} a_n = a$ .

Infine, supponiamo che  $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = a \in \mathbb{R}$ . Sia  $\varepsilon > 0$ . Dal Lemma 6 segue che esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $a - \varepsilon < a_k < a + \varepsilon$  per ogni  $k \geq n$ , ma questo significa che  $\lim a_n = a$ .

Il Teorema è completamente dimostrato. ■