Complemento 4

Continuità delle potenze e del logaritmo

La serie esponenziale e due limiti notevoli

Proposizione 1 (continuità delle potenze) *Sia x un numero reale diverso da zero e $\{a_n\}$ una successione di numeri tale che $a_n \ge 0$ e $\lim a_n = a$. Allora $\lim a_n^x = a^x$.*

Dimostrazione Poiché $a_n \ge 0$ si ha che $a := \lim a_n \ge 0$. Distinguiamo vari casi.

(i) Assumiamo $x > 0$ e $a = 0$. Sia $\varepsilon > 0$; esiste $N \in \mathbb{Z}_+$ tale che $a_n < \varepsilon^{1/x}$ per ogni $n \ge N$, e dunque, per tali n, $a_n^x < \varepsilon$, il che vuol dire $\lim a_n^x = 0$.

(ii) Assumiamo $x > 0$ e $a = 1$. Sia p un intero positivo tale che $p > x$ e poniamo $b_n = a_n - 1$. Allora, $\lim b_n = 0$ ed esiste N tale che $|b_n| < 1$ per ogni $n \ge N$ e, per tali n,

$$(1 - |b_n|)^p \le (1 - |b_n|)^x \le (1 + b_n)^x < (1 + |b_n|)^x < (1 + |b_n|)^p \ .$$

Ma le successioni a sinistra e a destra di queste disuguaglianze tendono a 1 (p è un intero e "il prodotto dei limiti è il limite del prodotto) e quindi per il teorema del confronto per successioni anche $(1 + b_n)^x = a_n^x$ tende a 1.

(iii) Assumiamo $x > 0$ e $a > 0$. Allora, $\lim \dfrac{a_n^x}{a^x} = \lim \Big(\dfrac{a_n}{a}\Big)^x = 1$ e dunque $\lim a_n^x = a^x$.

(iv) Assumiamo $x < 0$ e $a > 0$. Allora, dalla definizione di potenza con esponente negativo e da (iii) segue che

$$\lim a_n^x = \lim \frac{1}{a_n^{-x}} = \frac{1}{a^{-x}} = a^x \ .$$

La dimostrazione è completa. ∎

Si ricorda che la successione

$$e_n := \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n$$

è strettamente crescente e limitata e che, per definizione, il suo limite è il numero di Nepero

$$e := \lim e_n = \lim \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \ ;$$

inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che

$$\lim \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n = e^x \ . \tag{1}$$

Definizione 2 (Definizione di logaritmo naturale) *Se $x > 0$ chiamiamo logaritmo naturale di x e lo denotiamo con $\log x$ il logaritmo in base e di x*

$$\log x := \log_e x \ .$$

Lemma 3

$$\log(1+t) < t \ , \qquad \forall \ t > 0 \tag{2}$$

$$|\log(1+t)| \le 2|t| \ , \qquad \forall \ |t| \le \frac{1}{2} \ . \tag{3}$$

Dimostrazione Poiché per $n \ge 2$ e $t \ge 0$,

$$\Big(1 + \frac{t}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big(\frac{t}{n}\Big)^k = 1 + t + \frac{t^2}{2} \ \frac{n(n-1)}{n^2} + \cdots \ge 1 + t + \frac{t^2}{2} \ \frac{n(n-1)}{n^2} \ ,$$

prendendo il limite per $n \to \infty$ in tale relazione, per la (1), si ha che

$$e^t \ge 1 + t + \frac{t^2}{2} > 1 + t \ , \qquad \forall \ t > 0 \ ,$$

e prendendo il logaritmo di tale relazione (poiché i logaritmi in base $a > 1$ sono funzioni strettamente crescenti dell'argomento) segue la (2). Sia ora $-\frac{1}{2} \le t \le 0$ e poniamo $t = -s$ cosicché $0 \le s \le \frac{1}{2}$ e si noti che, in tal caso,

$$0 < \frac{1}{1-s} \le 1 + 2s \ .$$

Allora, per tali s, dalle proprietà del logaritmo e dalla (2) segue che

$$|\log(1+t)| = |\log(1-s)| = \log \frac{1}{1-s} \le \log(1+2s) \le 2s = 2|t| \ ,$$

che insieme alla (2) implica anche la (3). ∎

Proposizione 4 (continuità dei logaritmi) *Sia $1 \ne a > 0$ e sia $\{x_n\}$ una successione di numeri tale che $x_n > 0$ e $\lim x_n = x > 0$. Allora*

$$\lim_{n\to\infty} \log_a x_n = \log_a x \ . \tag{4}$$

Dimostrazione Consideriamo prima il caso in cui $a = e$. Sia $y_n := x_n/x$ cosicché $\lim y_n = 1$. Quindi esiste N tale che $|y_n - 1| < 1/2$ per ogni $n \ge N$; per tali n, dalle proprietà del logaritmo e da (3) segue che

$$|\log x_n - \log x| = |\log(x_n/x)| = |\log y_n| = |\log[1 + (y_n - 1)]| \le 2|y_n - 1| \to 0 \ ,$$

che è la (4) nel caso $a = e$. Tutti gli altri casi derivano dalla relazione

$$\log_a x = (\log_a e)(\log_e x) = (\log_a e) \log x \ . \ ∎$$

Definizione 5 (funzione esponenziale) *Per $x \in \mathbb{R}$ poniamo*

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \ . \tag{5}$$

Dal criterio del rapporto segue che la serie in (5), per ogni $x \in \mathbb{R}$ converge assolutamente. In particolare, per ogni x si ha che

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 0 \ . \tag{6}$$

Teorema 6 *Per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$.*

Dimostrazione Dalla formula del binomio di Newton segue che

$$\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\ \frac{x^k}{k!} \ , \qquad \text{con} \quad a_{nk} := \frac{n!}{(n-k)!n^k} \ . \tag{7}$$

Si noti che $a_{nk} > 0$ per ogni $n \geq k \geq 0$ e che

$$\begin{aligned} &a_{n0} = 1 \ , \qquad a_{n1} = 1 \ , && \forall\ n \\ &a_{nk} = \underbrace{\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)}_{(k-1)\ \text{termini}} < 1 \ , && \forall\ n \geq k \geq 2 \ . \end{aligned} \tag{8}$$

Si osservi anche che, per ogni k

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 1 \ . \tag{9}$$

Ora, se $n > m \geq 1$ si ha

$$\begin{aligned} \Big|\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n - \sum_{k=0}^{m} a_{nk}\ \frac{x^k}{k!}\Big| &= \Big|\sum_{k=m+1}^{n} a_{nk}\ \frac{x^k}{k!}\Big| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{n} a_{nk}\ \frac{|x|^k}{k!} \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{|x|^k}{k!} \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \ . \end{aligned}$$

Prendendo il limite per $n \to \infty$, ricordando la (1) e la (9), si ottiene

$$\Big|e^x - \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!}\Big| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \ .$$

Prendendo ora il limite per $m \to \infty$ in quest'ultima relazione e ricordando la (6) si ha la tesi. $\blacksquare$

È interessante stimare la *velocità* con cui la serie esponenziale converge.

Proposizione 7 *Sia* $0 < t < n+1$ *con* $n \in \mathbb{N}$. *Allora*

$$0 < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{t^k}{k!} < \frac{t^n}{n!}\,\frac{n+1}{n+1-t}\ . \tag{10}$$

In particolare,

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{t^k}{k!} < \frac{1}{n!}\,\frac{n+1}{n} < \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{1}{n-1}\ , \qquad \forall\ 0 < t \le 1\ , \tag{11}$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \le 2\,\frac{t^n}{n!}\ , \qquad \forall\ 0 < t \le \frac{n+1}{2}\ . \tag{12}$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{\infty} \frac{t^k}{k!} &= \frac{t^n}{n!}\left(1 + \frac{t}{n+1} + \frac{t^2}{(n+2)(n+1)} + \frac{t^3}{(n+3)(n+2)(n+1)} + \cdots\right) \\
&< \frac{t^n}{n!}\left(1 + \frac{t}{n+1} + \frac{t^2}{(n+1)^2} + \frac{t^3}{(n+1)^3} + \cdots\right) \\
&= \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{n+1}\right)^k = \frac{t^n}{n!}\,\frac{n+1}{n+1-t}\ .
\end{aligned}$$

Le (11) e (12) sono conseguenza immediata di (10). $\blacksquare$

Proposizione 8 *Sia* $\{a_n\}$ *una successione di numeri reali diversi da zero e tale che* $\lim a_n = 0$ *allora*[1]*:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1\ , \tag{13}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1 + a_n)}{a_n} = 1\ . \tag{14}$$

[1] Si noti che in (14) per poter definire il logaritmo va assunto che $1 + a_n > 0$, ma $a_n \to 0$ e quindi gli a_n sono definitivamente minori di 1 in modulo cosicché $1 + a_n > 0$ definitivamente.

Dimostrazione Dal Teorema 6 segue che

$$e^t = 1 + t + r_2(t) \ , \qquad r_2(t) := \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \ , \tag{15}$$

e dalla Proposizione 7 segue che

$$|r_2(t)| \le t^2 \ , \qquad \forall \ |t| \le \frac{3}{2} \ . \tag{16}$$

Quindi:

$$\frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = \frac{a_n + r_2(a_n)}{a_n} = 1 + \frac{r_2(a_n)}{a_n} \ ,$$

e, dalla (16), segue che[2]

$$\lim \left| \frac{r_2(a_n)}{a_n} \right| \le \lim |a_n| = 0 \ ,$$

che implica la (13).

La (14) segue immediatamente dalla (13) osservando che se si pone $b_n := \log(1 + a_n)$ si ha che $\lim b_n = 0$ (Proposizione 4) e

$$\lim \frac{\log(1 + a_n)}{a_n} = \lim \frac{b_n}{e^{b_n} - 1} = 1. \qquad \blacksquare$$

[2] Si noti che esiste N tale che per ogni $n \ge N$, $|a_n| < 3/2$.