Complemento 5
Definizione di seno, coseno e pi greco

Definizione 1 (Seno e coseno) *Per ogni* $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \sin x := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots \\ \\ \cos x := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots \end{cases} \tag{1}$$

Le due serie in (1) convergono assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$ (criterio del rapporto) e

$$\begin{cases} \cos 0 = 1 \\ \sin 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\operatorname{sen} x \end{cases} \tag{2}$$

Il comportamento del seno e coseno "vicino" a $x = 0$ è il seguente:

Lemma 2 *Per ogni* $|x| \le 1$ *si ha*

$$|\sin x - x| \le \frac{|x|^3}{3}\ , \qquad \left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}\right| \le \frac{x^4}{12}\ , \tag{3}$$

Dimostrazione Dalla definizione di seno e dalla Proposizione 7 del **Complemento 4** segue che, per $|x| \le 1$,

$$|\sin x - x| = \Big|\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\Big| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} \le \sum_{k=3}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \le 2\ \frac{|x|^3}{6} = \frac{|x|^3}{3}\ .$$

Analogamente, se $|x| \le 1$ allora

$$\left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}\right| = \Big|\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\Big| \le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \le \sum_{k=4}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \le 2\frac{x^4}{4!} = \frac{x^4}{12}\ .$$

La (3) è completamente dimostrata. ∎

Dal Lemma 2 seguono immediatamente i seguenti limiti notevoli[1]

Corollario 3 *Se* $0 \ne a_n \to 0$, *allora*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} = 1\ , \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \cos a_n}{a_n^2} = \frac{1}{2}\ , \tag{5}$$

[1] Si osservi che se $a_n \to 0$ allora esiste N tale che $|a_n| < 1$ per ogni $n \ge N$.

Le altre proprietà fondamentali delle funzioni "trigonometriche" seno e coseno sono raccolte nel seguente teorema che verrà dimostrato in seguito.

Teorema 4 *Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha:*

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{cases} \quad \textbf{(formule di addizione)}$$

(ii) $\exists\, \alpha \in (0,2)$ *tale che* $\cos\alpha = 0$ *e* $\cos x > 0$ *per ogni* $x \in [0,\alpha)$.

Definizione 5 (Pi greco) $\pi := 2\alpha$ *dove* α *è il numero in* (ii).

Osservazione 6 **(a)** Dalle formule di addizione (i) e da (2) segue immediatamente che[2]

$$\cos^2 x + \sin^2 x := (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1 \ ; \tag{6}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \ , \qquad \sin 2x = 2 \sin x \cos x \tag{7}$$

(b) Da (3) si ha che

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| \le \frac{x^2}{3} < \frac{1}{3} \ , \qquad (0 < |x| < 1) \tag{8}$$

che implica

$$\frac{\sin x}{x} - 1 > -\frac{1}{3} \ , \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\sin x}{x} > \frac{2}{3} \ , \qquad (0 < |x| < 1) \ , \tag{9}$$

e quindi, in particolare, $\sin x > 0$ se $0 < x < 1$.

(c) Da (i) e (ii) si ha che $|\sin \pi/2| = 1$ e dal Teorema 4 e da (2) segue che, per ogni $0 \le x < \pi/2$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\frac{\pi}{2} \ \sin x \ ;$$

quindi se $0 < x < \min\{1, \pi/2\}$, $\sin x > 0$ e $\sin \pi/2 > 0$, cioè, $\sin\pi/2 = 1$.

Dalle formule di addizione e dai valori già discussi ($\cos 0 = 1 = \sin\pi/2$, $\sin 0 = 0 = \cos\pi/2$) si ottiene immediatamente:

$$\begin{cases} \cos 0 = 1 \ , \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0 \ , \quad \cos\pi = -1 \ , \quad \cos\frac{3\pi}{2} = 0 \ , \quad \cos 2\pi = 1 \\ \\ \sin 0 = 0 \ , \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1 \ , \quad \sin\pi = 0 \ , \quad \sin\frac{3\pi}{2} = -1 \ , \quad \sin 2\pi = 0 \ . \end{cases} \tag{10}$$

Infine, da (ii) e da (10), segue che seno e coseno sono funzioni periodiche di periodo 2π. ossia, per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \ , \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin x \ . \tag{11}$$

[2]Per (6) si ponga $y = -x$ nella prima formula di (ii); per la (7) si ponga $y = x$.