Complemento 6

La derivata di seno e coseno

Lemma 1

$$|(x+h)^m - x^m| \le |h|\ (1+|x|)^m\ , \qquad \forall x\ ,\ \forall\ |h| \le 1\ ,\ \forall\ m \in \mathbb{N}\ . \tag{1}$$

Dimostrazione Dal binomio di Newton e dal fatto che $|h| \le 1$ segue:

$$\begin{aligned} |(x+h)^m - x^m| &= \Big| \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} h^j x^{m-j} \Big| \\ &\le |h|\ \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} |h|^{j-1} |x|^{m-j} \\ &\le |h|\ \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} |x|^{m-j} \\ &\le |h|\ \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} |x|^{m-j} \\ &= |h|\ (1+|x|)^m\ . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Osservazione 2 Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sono due serie convergenti, dalla definizione di convergenza per serie e dai teoremi sui limiti, segue immediatamente che, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, anche la serie $\sum(\alpha\, a_n + \beta\, b_n)$ è convergente e

$$\sum(\alpha\, a_n + \beta\, b_n) = \alpha \sum a_n + \beta \sum b_n\ .$$

Proposizione 3 $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.

Dimostrazione Dalla definizione (per serie) del seno e coseno e dall'Osservazione 2 segue che

$$\begin{aligned} &\Big| \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} - \cos x \Big| \\ &\quad = \Big| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\ \frac{(x+h)^{2n+1} - x^{2n+1}}{h}\ - (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \Big| \\ &\quad \le \sum_{n=0}^{\infty} A_n(h;x) \end{aligned} \tag{2}$$

con

$$A_n(h;x) := \Big| \frac{1}{(2n+1)!} \; \frac{(x+h)^{2n+1} - x^{2n+1}}{h} \; - \frac{x^{2n}}{(2n)!} \Big| \; .$$

Si noti che, poiché la derivata di x^{2n+1} è $(2n+1)x^{2n}$, si ha che

$$\lim_{h\to 0} A_n(h;x) = 0 \; , \quad \forall \; x \in \mathbb{R} \; , \; \forall k \; . \tag{3}$$

Inoltre dal Lemma 1 segue che, per ogni x, per ogni k e per ogni h con $|h| \leq 1$, si ha

$$\begin{aligned} A_n(h;x) \;\; &\leq \;\; \Big| \frac{1}{(2n+1)!} \; \frac{(x+h)^{2n+1} - x^{2n+1}}{h} \; - \frac{x^{2n}}{(2n)!} \Big| \\ &\leq \;\; \Big| \frac{1}{(2n+1)!} \; \frac{(x+h)^{2n+1} - x^{2n+1}}{h} \Big| + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ &\leq \;\; \frac{(1+|x|)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ &\leq \;\; 2 \; \frac{(1+|x|)^{2n+1}}{(2n)!} \end{aligned} \tag{4}$$

Si fissi $\varepsilon > 0$. Poiché la somma $\sum_{n\geq 0} 2 \; \frac{(1+|x|)^{2n+1}}{(2n)!}$ è convergente, da (4) segue che esiste un intero N per cui

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} A_n(h;x) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} 2 \; \frac{(1+|x|)^{2n+1}}{(2n)!} < \varepsilon \; . \tag{5}$$

Quindi, da (2), (3) ed (5) segue che

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \Big| \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} - \cos x \Big| \;\; &\leq \;\; \lim_{h\to 0} \Big(\sum_{n=0}^{N} A_n(h;x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n(h;x) \Big) \\ &\leq \;\; \lim_{h\to 0} \Big(\sum_{n=0}^{N} A_n(h;x) + \varepsilon \Big) \\ &= \;\; \varepsilon \; , \end{aligned}$$

e dall'arbitrarietà di ε segue

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} - \cos x = 0$$

ossia $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.

In maniera del tutto analoga si dimostra che $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$. ∎