Complemento 7

Dimostrazione del Teorema 4 (Complemento 5) e grafici di seno e coseno

Nel *Complemento 1* sono stati definiti (per serie) il seno ed il coseno ed è stato enunciato il seguente

Teorema 4 *Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha:*

(ii) $\begin{cases} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{cases}$

(ii) $\exists\, \alpha \in (0,2)$ *tale che* $\cos\alpha = 0$ *e* $\cos x > 0$ *per ogni* $x \in [0, \alpha)$.

Nel *Complemento 6* è stato dimostrato che

$$D \operatorname{sen} x = \cos x \ , \qquad D \cos x = -\operatorname{sen} x \ , \tag{1}$$

dove $Du = u'$ denota la derivata di u.

Per dimostrare le formule (i) del Teorema 4 faremo uso del seguente

Lemma 1 *Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione due volte derivabile e tale che*

$$u'' + u = 0 \ , \qquad \begin{cases} u(x_0) = 0 \\ u'(x_0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

per un qualche $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora u è identicamente uguale a 0.

Dimostrazione (Lemma 1) Sia $h(x) := \frac{1}{2}\Big(u(x)^2 + u'(x)^2\Big)$. Dalle regole di derivazione e per l'equazione differenziale (2) segue che $h' = uu' + u'u'' = u'(u + u'') = 0$ quindi h è identicamente costante su $\mathbb{R}$; poiché $h(x_0) = 0$ si ha che $h(x) = 0$ per ogni x, e questo significa che $u \equiv 0$ cioè la tesi. ∎

Dimostrazione di (i), Teorema 4. Fissato y, si definisca $u(x) := \cos(x + y) - \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$. Dalle regole di derivazione e dalla (1) segue che $u' = -\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$ e $u'' = -\cos(x+y) + \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = -u$ quindi u soddisfa l'equazione differenziale in (2) ed inoltre $u(0) = 0 = u'(0)$. Dunque, per il Lemma 1 u è identicamente nulla cioè vale la prima formula in (ii). La seconda formula si ottiene dalla prima derivando ambo i membri rispetto ad x e moltiplicando ambo i membri per -1.

Alla dimostrazione del punto (ii) premettiamo la seguente

Osservazione 2 Dalla dimostrazione della esistenza degli zeri per funzioni continue su di un intervallo $[a,b]$ dove $f(a) > 0 > f(b)$ segue che

$$\exists\, x_0 \in (a,b)\ , \qquad f(x_0) = 0 \qquad \text{e} \quad f(x) > 0\ \forall\, x \in [a, x_0)\ . \tag{3}$$

Dimostrazione di (ii), Teorema 4. Dalla definizione di coseno segue che

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{4!} + a = -\frac{1}{3} + a\ , \qquad a := \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!}\ . \tag{4}$$

Dalla Proposizione 7 del (*Complemento 4*) segue ha che

$$|a| \le \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!} < \sum_{k=6}^{\infty} \frac{2^k}{k!} < 2\,\frac{2^6}{6!} = \frac{8}{45}$$

Quindi

$$\cos 2 = -\frac{1}{3} + a \le -\frac{1}{3} + |a| < -\frac{1}{3} + \frac{8}{45} = -\frac{7}{45} < 0\ .$$

Ora poiché $\cos x$ è una funzione continua (essendo ovunque derivabile) e $\cos 0 = 1 > 0$ e $\cos 2 < 0$, dall'osservazione 2 segue (iii). $\blacksquare$

Grafici di seno e coseno Poiché $(\operatorname{sen} x)' = \cos x > 0$ in $[0, \pi/2)$ segue che la funzione $\operatorname{sen} x$, che in 0 vale 0, è strettamente crescente su $(0,\pi/2)$ ed in $\pi/2$ vale 1 (si ricordino i valori speciali nella (10) del *Complemento 5* dedotti come conseguenza del Teorema 4). Inoltre $(\operatorname{sen} x)'' = -\operatorname{sen} x < 0$ in $(0,\pi/2)$ e quindi il seno è concavo in $(0,\pi/2)$; $\pi/2$ è un massimo assoluto stretto; infine la tangente al grafico del seno in $x = 0$ ha coefficiente angolare 1 (cioè $(\operatorname{sen} x)'|_{x=0} = 1$). Questo determina completamente il grafico di $\operatorname{sen} x$ in $(0,\pi/2)$. Osservando che dalle formule di addizione (ii) segue che

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tag{5}$$

si vede che la retta $\{x = \pi/2\}$ è un asse di simmetria del grafico del seno (cioé il grafico del seno su $(\pi/2, \pi)$ non è altro che l'immagine simmetrica del seno tra $(0, \pi/2)$. Dalla disparità del seno ($\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$), possiamo ricostruire il grafico del seno anche tra $(-\pi, 0)$ e quindi dappertutto essendo il seno periodico di periodo 2π. Sempre da (5) segue che il grafico del coseno è semplicemente il grafico del seno traslato di $\pi/2$ ("verso sinistra").