Complemento 8

Lunghezza di curve e proprietà geometriche di seno e coseno

Definizione 1 *Sia $f \in C^1((a,b))$*

$$G_f = G_f(a,b) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = f(x), \ x \in (a,b)\} \ . \tag{1}$$

Si definisce lunghezza di G_f il numero[1]

$$\ell\Big(G_f(a,b)\Big) := \int_a^b \sqrt{1 + |f'|^2} \ . \tag{2}$$

Osservazione 2 (i) Se $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ sono due elementi di $\mathbb{R}^2$ con $x_1 < x_2$, allora il segmento

$$\sigma(z_1, z_2) := \{z_1 + t(z_2 - z_1) = (x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1) : \ t \in (0,1)\} \tag{3}$$

coincide con il grafico di

$$f(x) := y_1 + (x - x_1) \ \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

per $x \in (x_1, x_2)$. Poiché $f' = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, dalla Definizione 1 segue che la lunghezza di $\sigma(z_1, z_2)$ è data da

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \Big(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\Big)^2} = (x_2 - x_1) \ \sqrt{1 + \Big(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\Big)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \ ,$$

che, per definizione è la distanza euclidea tra z_1 e z_2.

(ii) Se denotiamo con

$$S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\} \tag{4}$$

la circonferenza unitaria in $\mathbb{R}^2$, se

$$\rho_\pm := \pm\sqrt{1 - x^2} \tag{5}$$

e $z_- = (-1, 0)$ e $z_+ = (1, 0)$, allora si ha che

$$S^1 = G_{\rho_+}(-1,1) \cup G_{\rho_-}(-1,1) \cup \{z_-\} \cup \{z_+\} \ . \tag{6}$$

[1] A priori questo è un integrale generalizzato o improprio ed il suo valore potrebbe essere ∞.

Possiamo dunque definire la lunghezza di S^1 come[2]

$$\ell(S^1) := \ell(G_{\rho_+}(-1,1)) + \ell(G_{\rho_-}(-1,1)) \ . \tag{7}$$

D'altra parte

$$\sqrt{1+|\rho_\pm'|^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ , \tag{8}$$

e quindi, dal teorema fondamentale del calcolo segue che[3]

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \sqrt{1+|\rho_\pm'|^2} &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ dx = -\int_{-1}^{1} (\operatorname{Arccos} x)' \\ &= \operatorname{Arccos}(-1) - \operatorname{Arccos}(1) = \pi - 0 = \pi \ , \end{aligned} \tag{9}$$

cosicché $\ell(S^1) = 2\pi$.

Da calcoli analoghi segue facilmente la seguente Proposizione che descrive le proprietà geometriche del seno e del coseno.

Proposizione 3 *Sia $(x,y) \in S^1$. Esiste un unico $t \in [0,2\pi)$ tale che*

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} \tag{10}$$

Inoltre, tale t coincide con la lunghezza dell'"arco in S^1 che va da $(1,0)$ a (x,y) in senso antiorario" o più precisamente:

$$t = \begin{cases} \ell\Big(G_{\rho_+}(x,1)\Big) \ , & \text{se } y \geq 0 \ , \\ \pi + \ell\Big(G_{\rho_-}(-1,x)\Big) \ , & \text{se } y < 0 \end{cases} \tag{11}$$

dove $\rho_\pm$ è definito in (5).

Dimostrazione Sia $y \geq 0$, $x \in [-1,1]$ e calcoliamo t come in (11):

$$\begin{aligned} t &= \int_x^1 \sqrt{1+|\rho_+'|^2} = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \ d\xi = -\int_x^1 (\operatorname{Arccos} \xi)' \\ &= \operatorname{Arccos}(x) - \operatorname{Arccos}(1) = \operatorname{Arccos}(x) \ . \end{aligned} \tag{12}$$

Dunque $\cos t = x$ e $y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos t^2} = |\operatorname{sen} t| = \operatorname{sen} t$ poiché $t \in [0,\pi]$ dove il seno è positivo.

Se, invece, $y < 0$ e $x \in (-1,1)$, da (11), segue che

$$\begin{aligned} t &= \pi + \int_{-1}^{x} \sqrt{1+|\rho_-'|^2} = \pi + \int_{-1}^{x} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \ d\xi = \pi + -\int_{-1}^{x} (\operatorname{Arccos} \xi)' \\ &= \pi + \operatorname{Arccos}(-1) - \operatorname{Arccos}(x) = 2\pi - \operatorname{Arccos}(x) \ . \end{aligned} \tag{13}$$

[2] Gli insiemi a destra della equazione in (6) sono disgiunti e i punti, per definizione, hanno lunghezza nulla.

[3] $\operatorname{Arccos}(x)$ è l'inversa di $t \in [0,\pi] \to \cos t$.

Si noti che i valori di Arccos sono in $[0,\pi]$ e dunque t, in (13) è un numero tra π e 2π. Dunque $\cos t = \cos(2\pi - \text{Arccos}\,(x)) = x$ e $y = -\sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1-\cos t^2} = -|\operatorname{sen} t| = \operatorname{sen} t$, poiché $t \in (\pi, 2\pi)$ dove il seno è negativo.

Abbiamo dimostrato la validità di (10) con t definito in (11). Passiamo all'unicità.

Supponiamo, per assurdo, che esistano $0 \le t_1 < t_2 < 2\pi$, tali che

$$\begin{cases} \cos t_1 = x = \cos t_2 \\ \operatorname{sen} t_1 = y = \operatorname{sen} t_2 \end{cases} \tag{14}$$

Poiché il coseno è iniettivo in $[0,\pi]$ e in $(\pi, 2\pi)$ segue che $t_1 \le \pi < t_2$, ma questo contraddice la seconda relazione in (14) poiché il seno è non negativo in $[0,\pi]$ e strettamente negativo in $(\pi, 2\pi)$. ∎

Osservazione 4 (i) La Proposizione 3 mostra che la mappa

$$t \in [0, 2\pi) \to \Phi(t) := (x,y) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \in S^1 \tag{15}$$

fornisce una corrispondenza biunivoca (iniettiva e surgettiva) tra l'intervallo $[0, 2\pi)$ e la circonferenza unitaria S^1.

(ii) Dalla periodicità di seno e coseno segue anche che Φ mette in corrispondenza biunivoca un *qualunque* intervallo $[a, a+2\pi)$ con S^1. Vale infatti la seguente affermazione:

Per ogni $(x,y) \in S^1$ *e per ogni* $a \in \mathbb{R}$, $\exists!\ t \in [a, a+2\pi)$ *tale che vale la relazione* (10).

Dimostrazione <u>*Esistenza*</u>: dalla Proposizione 3 segue che esiste $t_0 \in [0, 2\pi)$ tale che $\cos t_0 = x$ e $\operatorname{sen} t_0 = y$. Allora se[4] $k := [(t_0 - a)/(2\pi)]$, $t := t_0 - 2\pi k \in [a, a+2\pi)$ e $\cos t = \cos t_0$ e $\operatorname{sen} t = \operatorname{sen} t_0$.
<u>*Unicità*</u>: siano $t_1, t_2 \in [a, a+2\pi)$ tali che $\cos t_1 = \cos t_2$ e $\operatorname{sen} t_1 = \operatorname{sen} t_2$. Siano k_1 e k_2 due interi tali che $s_i := t_i - 2\pi k_i \in [0, 2\pi)$ ($k_i := [t_i/(2\pi)]$). Allora $\cos s_i = x$ e $\operatorname{sen} s_i = y$ e quindi, per la Proposizione 3, $s_1 = s_2$ e dunque (poiché t_1 e t_2 stanno nell'intervallo $[a, a+2\pi)$) $|t_1 - t_2| = 2\pi |k_1 - k_2| < 2\pi$ cioè $|k_1 - k_2| < 1$ che implica $k_1 = k_2$, ossia, $t_1 = t_2$. ∎

[4] $[x]$ denota la parte intera di x: $0 \le x - [x] < 1$.