

Complemento 9

Alcune proprietà di \mathbb{R}^2

1. (\mathbb{R}^2 come spazio vettoriale) \mathbb{R}^2 , ossia l’insieme delle coppie ordinate (x, y) con x e y in \mathbb{R} è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} cioè è possibile definire la somma di due elementi (o “vettori”) di \mathbb{R}^2 ed il prodotto di un vettore $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con uno “scalare” $a \in \mathbb{R}$:

$$\bullet (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (\text{S})$$

$$\bullet a(x, y) := (ax, ay) \quad (\text{P})$$

È immediato verificare che

la somma in (S) è commutativa e associativa; l’elemento neutro è $0 := (0, 0)$; per ogni vettore $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esiste l’opposto $-(x, y) := (-x, -y)$ tale che $(x, y) + (-x, y) = 0$; vale la proprietà distributiva.

2. (Coordinate polari) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \exists! (r, t) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ tale che

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t; \quad (1)$$

infatti: $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ cosicché $(x/r, y/r) \in S^1$ e t è l’unico numero in $[0, 2\pi)$ (vedi Proposizione 21) tale che $(x/r, y/r) = (\cos t, \sin t)$.

Definizione 1 Se $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e $(r, t) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ sono le sue coordinate polari, r prende il nome di norma di z , e si denota $r := \|z\|$, e t prende il nome di argomento principale di z e si denota con $t = \text{Arg}(z)$.

3. (Prodotto scalare e disuguaglianza di Cauchy–Schwartz) Se $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ sono due elementi di \mathbb{R}^2 si definisce il loro prodotto scalare come

$$z_1 \cdot z_2 := x_1 x_2 + y_1 y_2. \quad (2)$$

È immediato verificare che

il prodotto scalare è commutativo ($z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$) ed è lineare in ogni componente

$$(a_1 z_1 + a_2 z_2) \cdot z_3 = a_1 (z_1 \cdot z_3) + a_2 (z_2 \cdot z_3), \quad (\forall z_i \in \mathbb{R}^2, a_i \in \mathbb{R}),$$

(ed analogamente per la seconda componente).

Osservazione 2 (i) $z \cdot z = \|z\|^2$ per ogni $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Il prodotto scalare ha una semplice interpretazione geometrica. Siano $z_i := (x_i, y_i) \neq 0$ due vettori in \mathbb{R}^2 non nulli, e siano (r_i, t_i) le coordinate polari di z_i . Dalle formule di addizione per il coseno otteniamo:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos t_1, \sin t_1) \cdot r_2(\cos t_2, \sin t_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos t_1 \cos t_2 + \sin t_1 \sin t_2) \\ &= r_1 r_2 \cos(t_1 - t_2). \end{aligned} \quad (3)$$

Da tale relazione segue in particolare la seguente **disuguaglianza di Cauchy–Schwartz**:

$$|z_1 \cdot z_2| \leq \|z_1\| \|z_2\|, \quad \forall z_i \in \mathbb{R}^2. \quad (4)$$

(Si noti che se uno dei vettori z_i è nullo tale disuguaglianza è ovviamente verificata col segno =).

(iii) Vista la grande importanza della disuguaglianza di Cauchy–Schwartz, ne diamo una seconda dimostrazione algebrica (ossia che non fa uso delle funzioni trigonometriche). Riscriviamo la (4) ponendo $z_i = (x_i, y_i)$:

$$|x_1 x_2 + y_1 y_2| \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}. \quad (5)$$

Dividendo per $r_1 r_2$ i termini nella (5) ed usando (2), si ha che (5) è equivalente a

$$|(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \cdot (\bar{x}_2, \bar{y}_2)| \leq 1 \quad (6)$$

dove $\bar{x}_i := x_i/r_i$ e $\bar{y}_i := y_i/r_i$, cosicché $(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in S^1$. Si osservi che,

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

poiché tale relazione è equivalente alla relazione $(a - b)^2 \geq 0$. Dunque,

$$\begin{aligned} |(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \cdot (\bar{x}_2, \bar{y}_2)| &\leq |\bar{x}_1| |\bar{x}_2| + |\bar{y}_1| |\bar{y}_2| \leq \frac{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}{2} + \frac{\bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2}{2} \\ &= \frac{\bar{x}_1^2 + \bar{y}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{y}_2^2}{2} = 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4. (Disuguaglianza triangolare) Per ogni $z_i := (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|. \quad (8)$$

Dimostrazione Elevando al quadrato e “cancellando termini uguali” si vede che la relazione (8) è equivalente a

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2},$$

che è implicata immediatamente dalla disuguaglianza di Cauchy–Schwartz (5).

■

5. (Norma e distanza) Dalla definizione di norma e dal punto 4 segue subito che la norma verifica le seguenti proprietà (“assiomi della norma”):

$$(n_1) \quad \|z\| \geq 0, \forall z \in \mathbb{R}^2 \text{ e } \|z\| = 0 \text{ se e solo se } z = 0$$

$$(n_2) \quad \|az\| = |a|\|z\|, \forall z \in \mathbb{R}^2 \text{ e } a \in \mathbb{R}$$

$$(n_3) \quad \|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|, \forall z_i \in \mathbb{R}^2$$

Definizione 3 Se z_1 e z_2 sono due elementi di \mathbb{R}^2 si definisce la **distanza** (o “distanza euclidea”) di z_1 da z_2 il numero non negativo

$$d(z_1, z_2) := \|z_1 - z_2\|. \quad (9)$$

Dalle proprietà della norma (i)–(iii) segue immediatamente che la distanza verifica le seguenti proprietà (“assiomi della distanza”):

$$(d_1) \quad d(z_1, z_2) \geq 0, \forall z_i \in \mathbb{R}^2 \text{ e } d(z_1, z_2) = 0 \text{ se e solo se } z_1 = z_2$$

$$(d_2) \quad d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1), \forall z_i \in \mathbb{R}^2$$

$$(d_3) \quad d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2), \forall z_i \in \mathbb{R}^2.$$