Primo Esonero – 17/11/2008

N.B. • *Indicare in cima all'elaborato da consegnare: nome, cognome, data di nascita, n. matricola (o n. documento).*
• *Il punteggio totale è in centesimi; il punteggio di ogni singolo esercizio è indicato tra parentesi quadrate.*
• *È* **vietato**: *parlare, scambiarsi informazioni; consultare testi, appunti, etc.; l'uso del cellulare, calcolatrici, etc.*
• *Le risposte vanno sempre motivate chiaramente e sinteticamente! Risposte senza giustificazioni non danno punteggio.*

Es 1 [Pt. 6] Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che verifica la disuguaglianza $|x+1| < x^2$.

Es 2 [Pt. 6] Determinare l'estremo superiore ed inferiore (specificando se si tratta di max/min) dell'insieme $\{x = \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right) \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Facoltativo*: Calcolare il massimo e minimo limite della successione $\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

Es 3 [Pt. 6] Dimostrare per induzione che $\dfrac{2^n}{\sqrt{n}} > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Es 4 [Pt. 26] Calcolare i seguenti limiti

(4.1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2}-n\right)$; **(4.2)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^5-n^7}{(n^2+10n)(n^5+1)}$; **(4.3)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(\log n)^{10}}{(\sqrt{3/2})^n}$;

(4.4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\sqrt{n}-\log n}}{2^n}$; **(4.5)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n^2}}{n!}$; **(4.6)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\cos\frac{1}{n^2}-e^{-1/n^4}$.

Es 5 [Pt. 26] Studiare il comportamento (al variare di x, se compare) delle seguenti serie

(5.1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+2}-n\right)$; **(5.2)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}}{\log n+\log\sqrt{n}}$; **(5.3)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2n}{2n^{10}+\cos n}$;

(5.4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$; **(5.5)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n^2}}{n!}$; **(5.6)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^{1-\sqrt{2}x}+\left(\frac{x}{2}\right)^n$.

Es 6 [Pt. 6] Sia $\varepsilon > 0$. Trovare $L \in \mathbb{R}$ and $N \in \mathbb{N}$ tali che $\left|\dfrac{n+\operatorname{sen} n}{2n+1}-L\right| < \varepsilon$ per ogni $n \geq N$.

Es 7 [Pt. 6] Dare la definizione di $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$; dire se tale numero è maggiore o minore di 1. Facoltativo*: dire se $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ è maggiore o minore di 2.

Es 8 [Pt. 8] Enunciare l'assioma dell'estremo superiore. Usare tale assioma per dimostrare che ogni sottoinsieme limitato di $\mathbb{N}$ ammette massimo.

Es 9 [Pt. 6] Definire $\operatorname{senh} x$ e dimostrare il limite notevole $\lim\dfrac{\operatorname{senh} a_n}{a_n} = 1$ valido per una qualunque successione $0 \neq a_n \to 0$.

Es 10 [Pt. 4] Dire per quali x è definito $\log\log\cosh x$.

Risposte 1: $\{x < (1-\sqrt{5})/2\} \cup \{x > (\sqrt{5}+1)/2$. **2:** il massimo è 1 (per $n=1$), il minimo è -1 (per $n=3$). **3:** segue dal fatto che $8n^3 > (n+1)^3$. **4.1:** 0; **4.2:** $-1/10$; **4.3:** 0; **4.4:** 0; **4.5:** ∞; **4.6:** 0. **5.1:** diverge; **5.2:** converge (Leibnitz); **5.3:** converge; **5.4:** converge (rapporto); **5.5:** diverge (rapporto); **5.6:** converge per $\sqrt{2} < x < 2$, non converge altrimenti. **6:** $L = 1/2$ e si può prendere $N = [3/\varepsilon]+1$. **7:** $1 < (\sqrt{2})^{\sqrt{2}} = 2^{1/\sqrt{2}} < 2$. **10:** $\forall\ x \neq 0$.