

Secondo Esonero – 27/1/2009

N.B. • Indicare in cima all'elaborato da consegnare: nome, cognome, data di nascita, n. matricola (o n. documento).

• Il punteggio totale è in centesimi; il punteggio di ogni singolo esercizio è indicato tra parentesi quadrate.

• È vietato: parlare, scambiarsi informazioni; consultare testi, appunti, etc.; l'uso del cellulare, calcolatrici, etc.

• Le risposte vanno sempre motivate chiaramente e sinteticamente! Risposte senza giustificazioni non danno punteggio.

Es 1 [Pt. 14] Calcolare i seguenti limiti di funzioni (possibilmente senza usare i teoremi di Bernoulli-de l'Hopital)

$$(1.1) \text{ [Pt. 4]} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos x}{x^2}; \quad (1.2) \text{ [Pt. 4]} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}};$$

$$(1.3) \text{ [Pt. 6]} \lim_{x \rightarrow 0^-} |x|^{\frac{1}{x}}.$$

Es 2 [Pt. 10] Studiare la funzione $x \rightarrow f(x) = \frac{\log x}{x^2}$, tracciandone, in particolare il grafico, e trovandone (se esistono) il massimo e il minimo.

Es 3 [Pt. 10] Calcolare il polinomio di Maclaurin (Taylor in $x_0 = 0$) di grado 4 della funzione $(e^x - 1)^2$.

Es 4 [Pt. 10] (i) Calcolare il modulo del numero complesso $z = 1 + i - \frac{i}{1 - 2i}$.
(ii) Trovare tutte le soluzioni complesse z dell'equazione $z^3 = |z|^2$.

Es 5 [Pt. 24] Calcolare i seguenti integrali:

$$(5.1) \text{ [Pt. 6]} \int \cos^2(\log x) dx; \quad (5.2) \text{ [Pt. 6]} \int_2^5 \frac{x^2+1}{x-1} dx;$$

$$(5.3) \text{ [Pt. 12]} \int \sqrt{x^2+x} dx.$$

Es 6 [Pt. 8] Dire se i seguenti integrali impropri convergono o no

$$(6.1) \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{x}}{x} dx; \quad (6.2) \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x}{x^2} dx.$$

Es 7 [Pt. 12] Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo.

Es 8 [Pt. 12] Enunciare e dimostrare la formula di Eulero per i numeri complessi.

Risposte

1.1: $-1/2$. **1.2:** $2\sqrt{5}$. **1.3:** ∞ . **2:** il massimo è $1/(2e)$ per $x = \sqrt{e}$; l'estremo inferiore è $-\infty$; flesso in $x = e^{5/6}$. **3:** $P_4(x; 0) = x^2 + x^3 + \frac{7}{12}x^4$. **4 (i):** $\sqrt{13/5}$. **4 (ii):** $0, 1, -1/2 \pm i\sqrt{3}/2$.

5.1: $\frac{x}{2} + \frac{x}{10} (\cos(2 \log x) + 2 \sin(2 \log x))$. **5.2:** $\frac{27}{2} + 4 \log 2$.

5.3: $\frac{2x+1}{4} \sqrt{x^2+x} - \frac{1}{8} \log |2x+1+2\sqrt{x^2+x}|$. **6.1:** converge. **6.2:** converge.